TMA4100 – Matematikk 1

DESIG/IØT/MART/PROD

Alexander Lundervold

Teknostart. Forelesning 5, 24.08.2011

ØVINGER

UKE 34	Mandag 22/8	Tirsdag 23/8	Onsdag 24/8	Torsdag 25/8	Fredag 26/8
08:15–09:00					
09:15–10:00	Matte 1		Matte 1	Matte 1	
10:15–11:00		Matte 1			Prosjekt
11:15–12:00	Lunsjpause	Lunsjpause	Lunsjpause	Lunsjpause	Lunsjpause
12:15–13:00		Grupperefleksjon			Presentasjon
13:15–14:00				Prosjekt fram til kl. 14.30	
14:15–15.00	Prosjekt	Fra kl. 13:45 Prosjekt	Prosjekt		Evaluering TS
15:15–16:00				Grupperefleksjon	

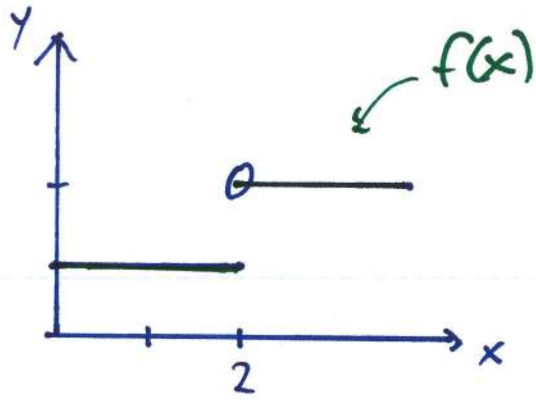
I går:

- "Sandwich-teoremet" ("Skviseteoremet"), og bruk av dette $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- Presis definisjon av grenser. Ga motivasjon for *hvorfor* man trenger denne, og så på et konkret eksempel.

I dag:

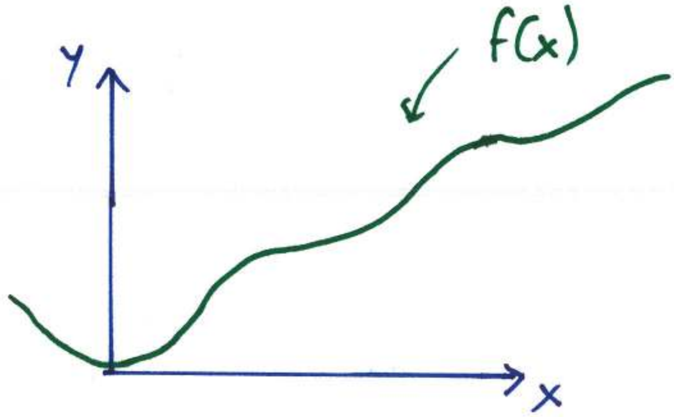
- Kontinuitet av funksjoner
- Derivasjon: definisjon og eksempler
- Velge "referansegruppe"

KONTINUITET:



Kontinuerlig i $x = 2$?

NEI



Kontinuerlig ?

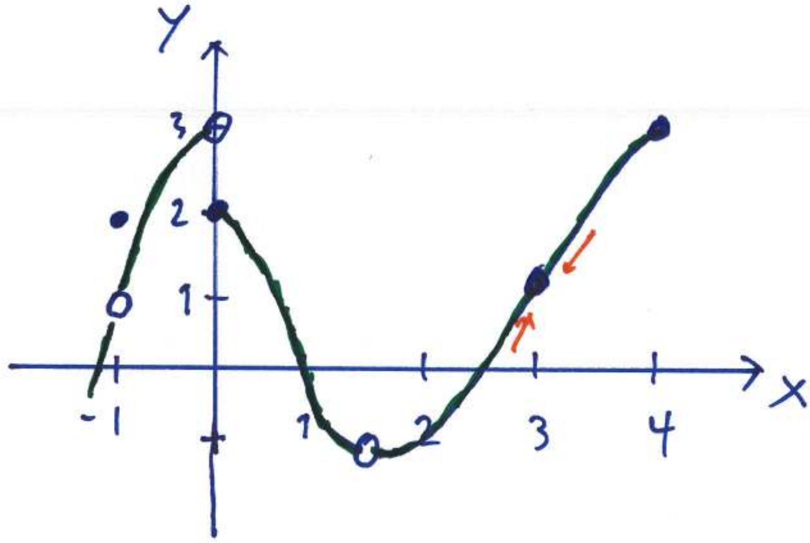
JA

Intuitivt: En funksjon er kontinuerlig dersom grafen "henger sammen"

~~En test for kontinuitet~~:

En "test" av kontinuitet:

La x-verdien nærme seg et punkt a fra høyre og venstre.
Dersom funksjonsverdien da nærmer seg $f(a)$, sier vi at $f(x)$ er kontinuerlig i x.



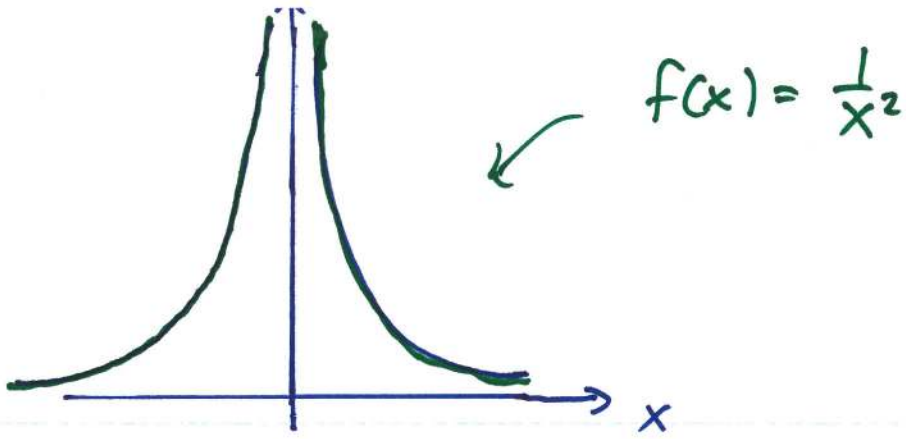
Diskontinuerlig i

$x = -1$ (nærmer seg 1, ikke $f(-1) = 2$)

grafen "hopper" $x = 0$ (nærmer seg ulike ting fra høyre og fra venstre)

grafen har "hull" $x = 1.5$ ($f(2)$ finnes ikke)

Ellers er funksjonen kontinuerlig

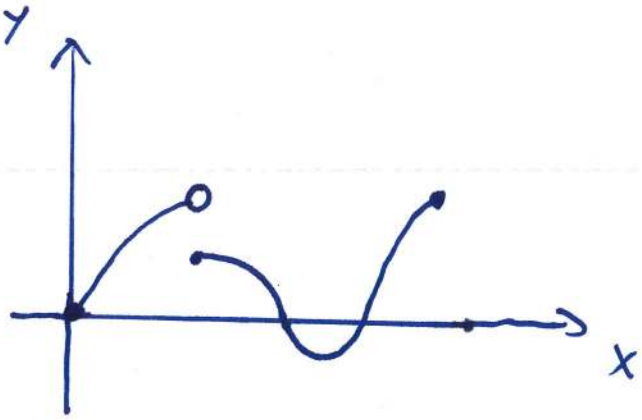


Denne er ikke kontinuerlig i $x = 0$
siden den går mot ∞ når x går mot 0

Vi har et "språk" som kan brukes
til å presisere dette:

Grenser

Vi må skille mellom endepunkt og indre punkt.

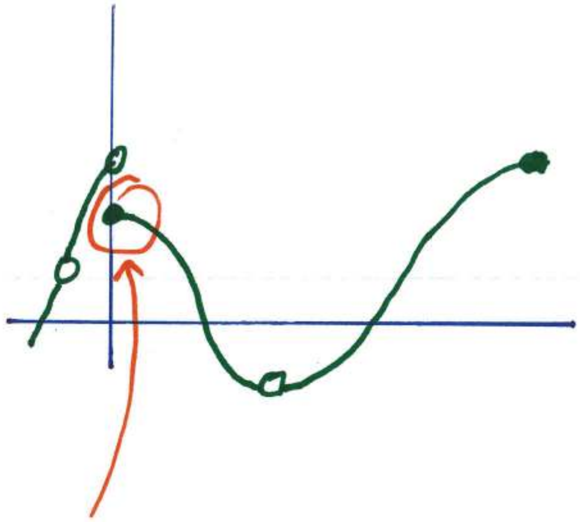


DEFINISJON:

- $y = f(x)$ er kontinuerlig i et indre punkt $x = a$ dersom
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- $y = f(x)$ er kontinuerlig i et venstre endepunkt (høyre endepunkt) $x = a$ dersom
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$
$(x \to a^-)$

Merk: For å være kontinuerlig i $x = a$ må
(i) grensen $\lim_{x \to a} f(x)$ eksistere, og
(ii) den må være lik $f(a)$

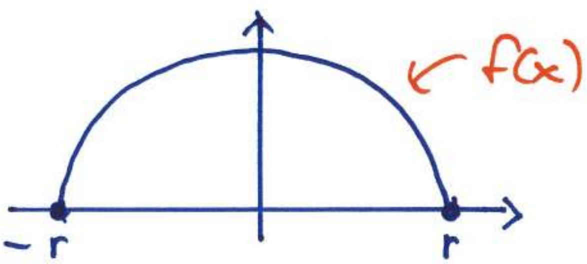


sier at f(x) er <u>høyrekontinuerlig</u>
(kontinuerlig fra høyre) dersom

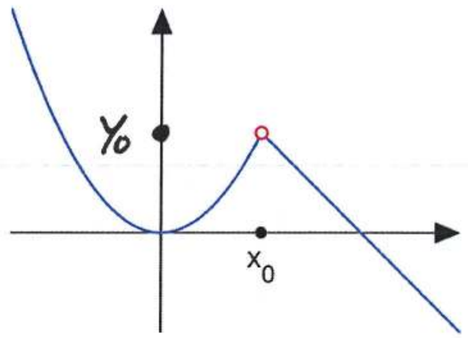
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

(Tilsvarende : <u>venstrekontinuerlig</u>)

Vi sier at f(x) er <u>kontinuerlig på et intervall</u>
$I = [-b, b]$ dersom f(x) er kontinuerlig
i alle $x \in I$.

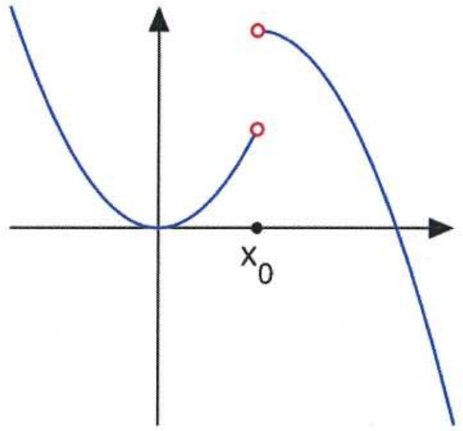


NOEN TYPER DISKONTINUITETER

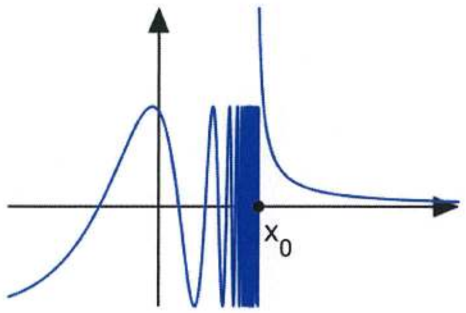


Slettbar ("removable") diskontinuitet

Hadde vi satt $f(x) = y_0$ ville funksjonen vært kontinuerlig her.



Hopp-diskontinuitet



Essensiell diskontinuitet. (Funksjonen er her av typen $sin(1/x)$)

Grensen eksisterer ikke

Vi kjenner noen eksempler:

Husk:

La $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$

Da er $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$

POLYNOMER ER KONTINUERLIGE OVERALT

sinus & cosinus er kontinuerlige overalt

(Merk: [illegible]
SE: [illegible] i boken [illegible])
S.114

Kjenner vi noen kontinuerlige funksjoner kan vi lage flere ved å kombinere:

TEOREM: Si at f og g er kontinuerlige i $x=c$.
Da er følgende funksjoner også kontinuerlige:

1. $f+g$
2. $f-g$
3. $f \cdot g$
4. $k \cdot f$, der k er et tall
5. f/g, så lenge $g(c) \neq 0$
6. $f^{r/s}$, så lenge den er definert i et åpent intervall rundt $x=c$

Disse følger fra regnereglene for grenser

ANDRE MÅTER Å LAGE NYE KONT. FKSJ:

- Dersom f er en kontinuerlig en-til-en funksjon med def.område D og verdimengde R, så er

$$f^{-1} \text{ kontinuerlig på } R$$

<u>EKS.</u> $f(x) = e^x$ og $f(x) = \ln x$

- "Komposisjonen av kontinuerlige funksjoner er kontinuerlig:"

Dersom f er kontinuerlig i c
og g er kontinuerlig i $f(c)$,
så er $g \circ f$ kontinuerlig i c.

<u>EKS.</u> $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$

NYTTIG FAKTUM

Dersom $g(x)$ er kontinuerlig i punktet $x = b$ og $\lim_{x \to c} f(x) = b$, så er

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(b) = g\left(\lim_{x \to c} f(x)\right)$$

EKSEMPEL:

$$\lim_{x \to 1} \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2x(x-1)}\right)$$

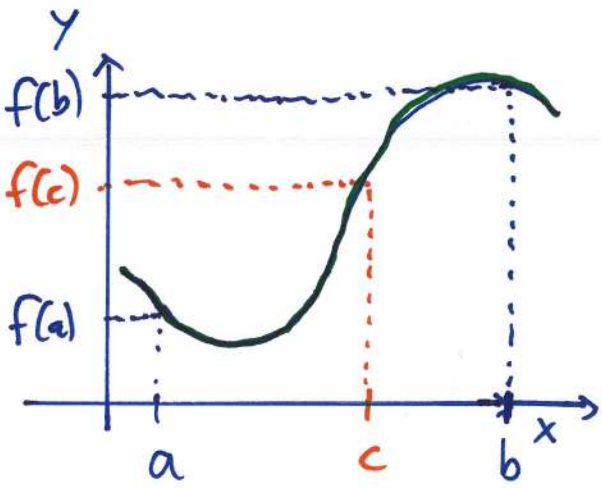
$\sin^{-1}$ kont. i $x=1$

$$= \sin^{-1}\left(\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2x(x-1)}\right)$$

$$= \sin^{-1}(1/2) \qquad = \pi/6$$

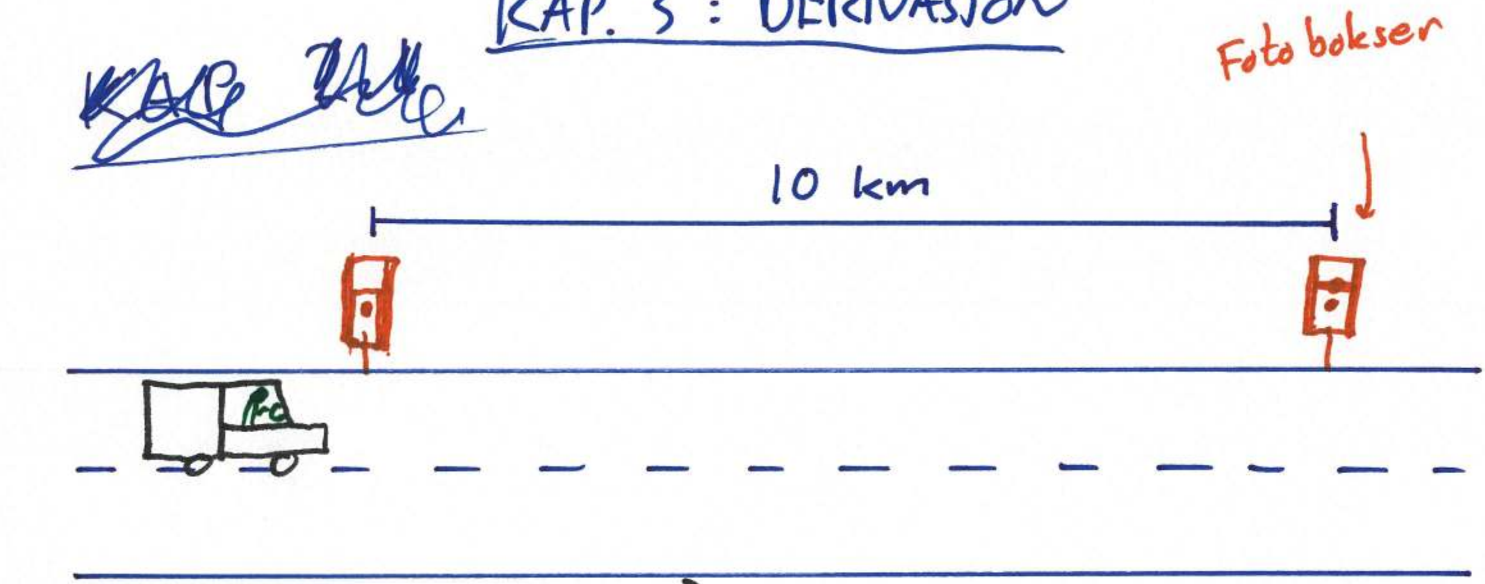
MELLOMVERDITEOREMET

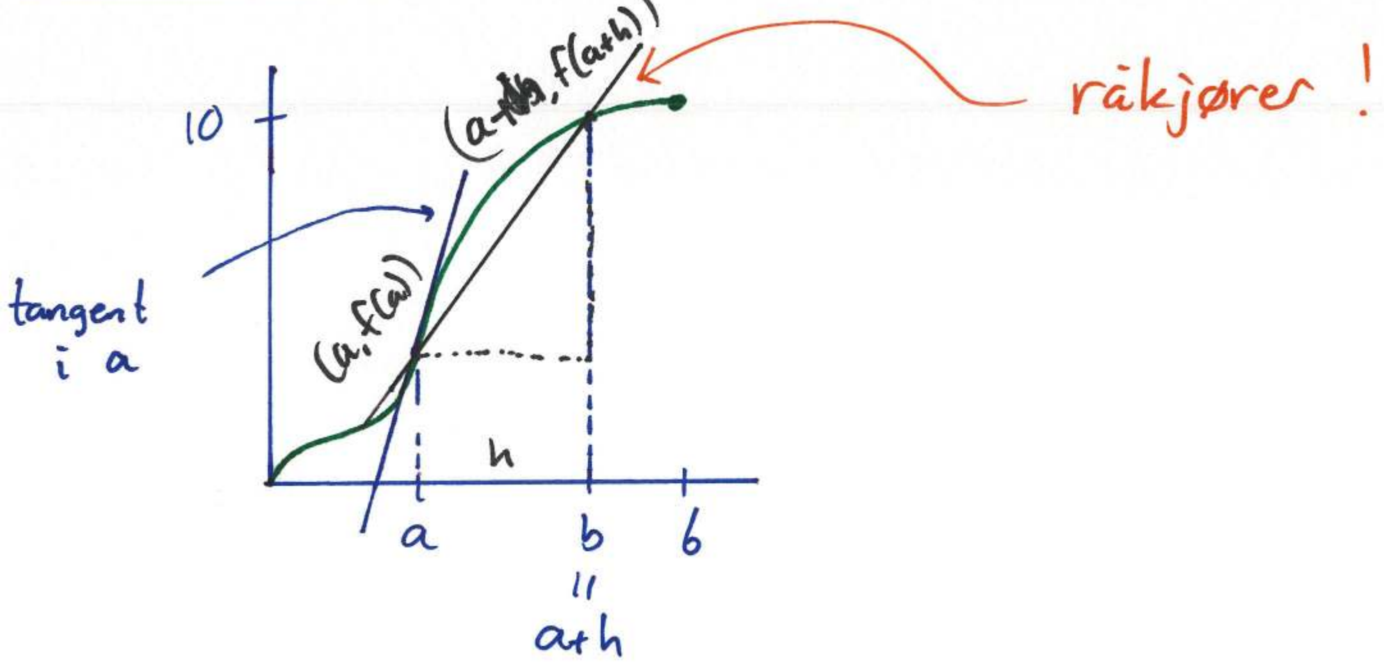
En funksjon $f(x)$ som er kontinuerlig på et intervall $[a, b]$ har alle funksjonsverdier mellom $f(a)$ og $f(b)$.



MERK: Stemmer bra med vår intuitive forståelse av kontinuitet ("henger sammen")

KAP. 3 : DERIVASJON





Stigningen til sekant linjen mellom $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$ er

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Tangenten i punktet a er den rette linjen gjennom a med stigning

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ (Instantanfart)

Illustrer på PC

Denne grensen (dersom den eksisterer) kalles **den deriverte til f i punktet a**

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Vi kan se på den deriverte som en funksjon.

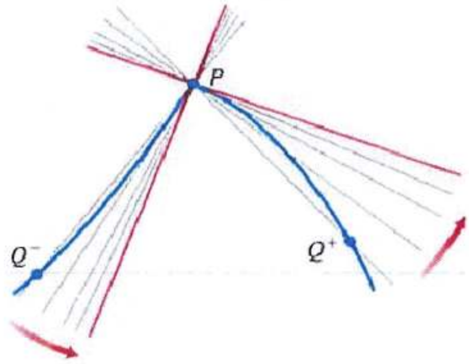
- En funksjon $f(x)$ gir "høyden" til kurven $y = f(x)$ i posisjonen x.
- Den deriverte $f'(x)$ gir stigningen til tangenten i x.

ALTSÅ

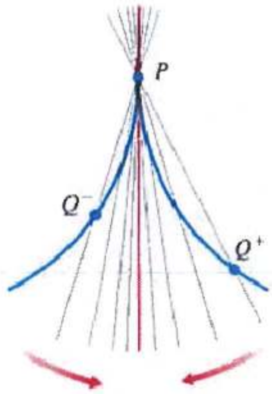
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(Så lenge grensen eksisterer)

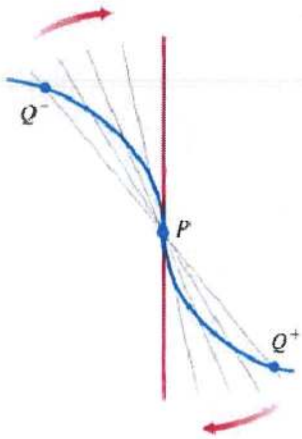
NÅR DERIVERTE IKKE EKSISTERER



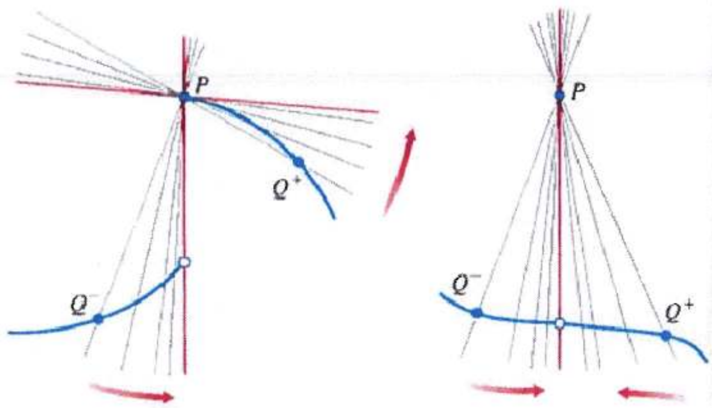
1. a *corner*, where the one-sided derivatives differ.



2. a *cusp*, where the slope of PQ approaches ∞ from one side and $-\infty$ from the other.



3. a *vertical tangent*, where the slope of PQ approaches ∞ from both sides or approaches $-\infty$ from both sides (here, $-\infty$).

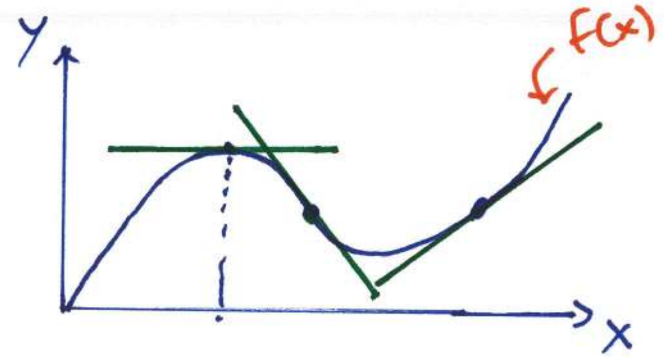


4. a *discontinuity* (two examples shown).

MERK: • På områder der $f'(x) > 0$ stiger funksjonsverdiene $f(x)$

• Der $f'(x) < 0$ ~~synker~~ synker de.

• Der $f'(x) = 0$ har vi en horisontal tangent, og $f(x)$ hverken synker eller stiger.



En funksjon $y = f(x)$ kalles deriverbar på et åpent intervall dersom den har en derivert i hvert pkt. i intervallet.

På et lukket intervall $[a, b]$ dersom den er deriverbar på (a, b) og høyre-deriverbar i a, venstre-deriverbar i b:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

I MORGEN:

- Derivasjon: regneregler og egenskaper

- Deriverte av trigonometriske funksjoner

<table>
<tr><th>UKE 34</th><th>Mandag 22/8</th><th>Tirsdag 23/8</th><th>Onsdag 24/8</th><th>Torsdag 25/8</th><th>Fredag 26/8</th></tr>
<tr><td>08:15–09:00</td><td rowspan="3">Matte 1</td><td></td><td rowspan="3">Matte 1</td><td rowspan="3">Matte 1</td><td></td></tr>
<tr><td>09:15–10:00</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10:15–11:00</td><td>Matte 1</td><td>Prosjekt</td></tr>
<tr><td>11:15–12:00</td><td>Lunsjpause</td><td>Lunsjpause</td><td>Lunsjpause</td><td>Lunsjpause</td><td>Lunsjpause</td></tr>
<tr><td>12:15–13:00</td><td rowspan="4">Prosjekt</td><td>Grupperefleksjon</td><td rowspan="4">Prosjekt</td><td rowspan="3">Prosjekt fram til kl. 14.30</td><td rowspan="2">Presentasjon</td></tr>
<tr><td>13:15–14:00</td><td rowspan="3">Fra kl. 13:45 Prosjekt</td></tr>
<tr><td>14:15–15.00</td><td>Evaluering TS</td></tr>
<tr><td>15:15–16:00</td><td>Grupperefleksjon</td><td></td></tr>
</table>