TMA4100 – Matematikk 1

DESIG/IØT/MART/PROD

Alexander Lundervold

Teknostart. Forelesning 4, 23.08.2011

UKE 34	Mandag 22/8	Tirsdag 23/8	Onsdag 24/8	Torsdag 25/8	Fredag 26/8
08:15–09:00	Matte 1		Matte 1	Matte 1	
09:15–10:00					
10:15–11:00		Matte 1			Prosjekt
11:15–12:00	Lunsjpause	Lunsjpause	Lunsjpause	Lunsjpause	Lunsjpause
12:15–13:00	Prosjekt	Grupperefleksjon	Prosjekt	Prosjekt fram til kl. 14.30	Presentasjon
13:15–14:00		Fra kl. 13:45 Prosjekt			
14:15–15.00					Evaluering TS
15:15–16:00				Grupperefleksjon	

ØVING

I går:

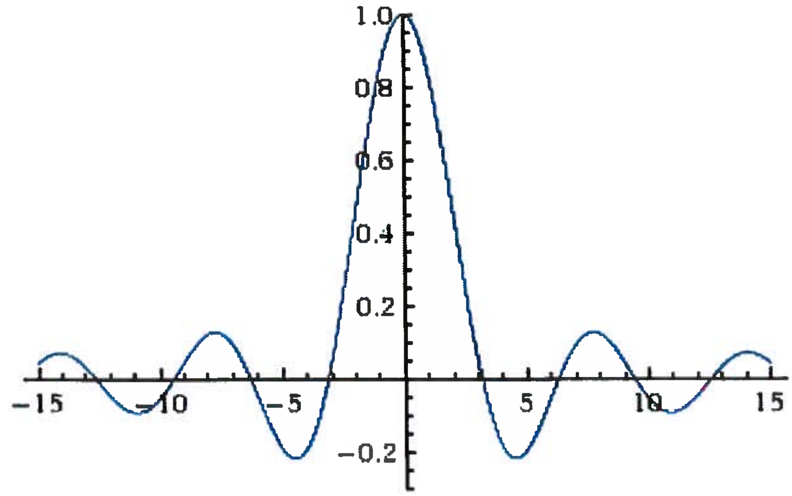
- Fikk intuisjon for grensebegrepet ("gå mot", "nærme seg")
- Regnet endel eksempler basert på en liste med regneregler (og noen regnetriks)

I dag:

- *Skviseteoremet* (eller *sandwich-teoremet*). Gjør oss i stand til å regne ut flere grenser
- Gjøre grensebegrepet *presist*
- (Se på *kontinuitet av funksjoner*?)

EKSEMPEL:

Plot



plot sin(x)/x, x=−15..15, y=−0.3..1

WolframAlpha

HVA ER

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \; ?$$

SKVISETEOREMET (SANDWICH-TEOREMET)

Si at

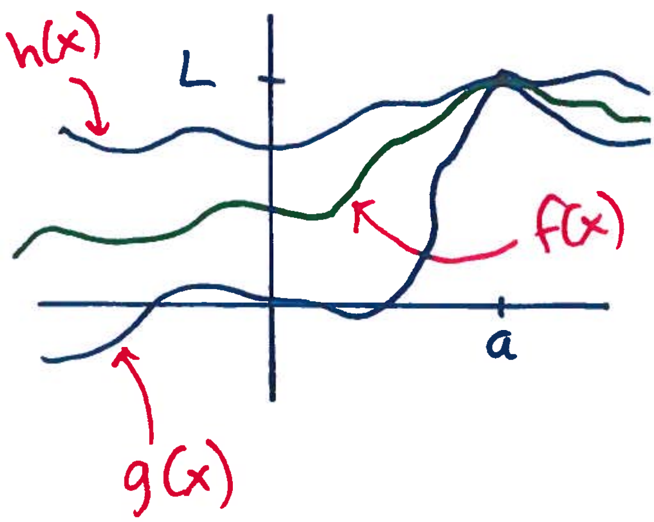
$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

i et intervall rundt $x = a$ (eventuelt med unntak av i $x = a$)

Dersom

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

$$\lim_{x \to a} h(x) = L$$



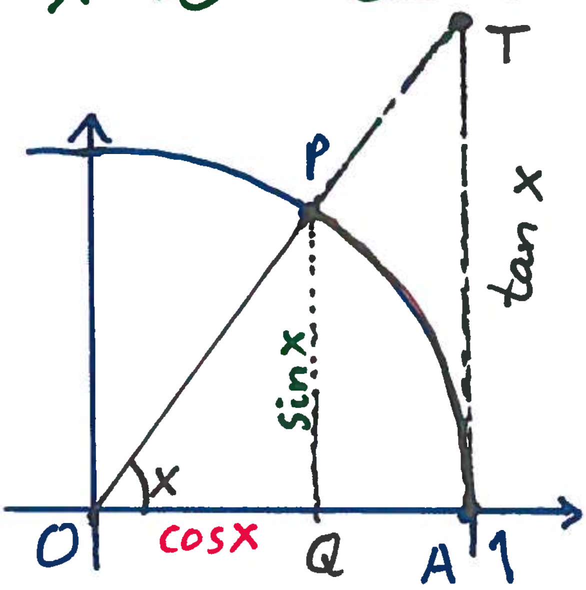
SÅ er

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Ser på grensen når $x \to 0^+$ først.

<u>Husk</u>: grensen når $x \to 0$ eksisterer og er lik L hvis og bare hvis grensene når $x \to 0^-$ og $x \to 0^+$ eksisterer og er lik L.



MERK:

Arealet av trekanten ΔOAP er mindre enn arealet av sirkelsektoren OAP, som igjen er mindre enn arealet av trekant ΔOAT

Dermed:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x \leq \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan \theta$$

trekant ΔOAP — sektor OAP — trekant ΔOAT

(Husk: arealet av sektor er $\frac{1}{2} r^2 x$, der x er vinkelen)

Vi får

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

Del på $\frac{1}{2}\sin x$: $\quad 1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$ $\quad \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Snu opp-ned: $\quad 1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$

Vi har

$$\lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1}$$

se neste side

Så skviseteoremet gir at

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$$

$\dfrac{\sin x}{x}$ er symmetrisk om y-aksen $\left(\text{siden } \dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}\right)$, så det samme må gjelde dersom $x \to 0^-$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Viser at

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

Vi har

$$1-\cos x = (1-\cos x)\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}$$

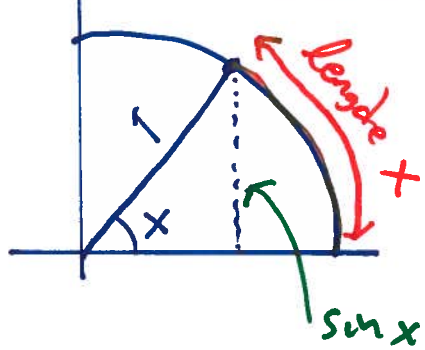
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad$ $|\cos x| < 1$

$$= \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} < \sin^2 x$$

MEN:

$$\sin x < x$$

For $0 < x < \pi/2$
(Samme med andre områder)



Så

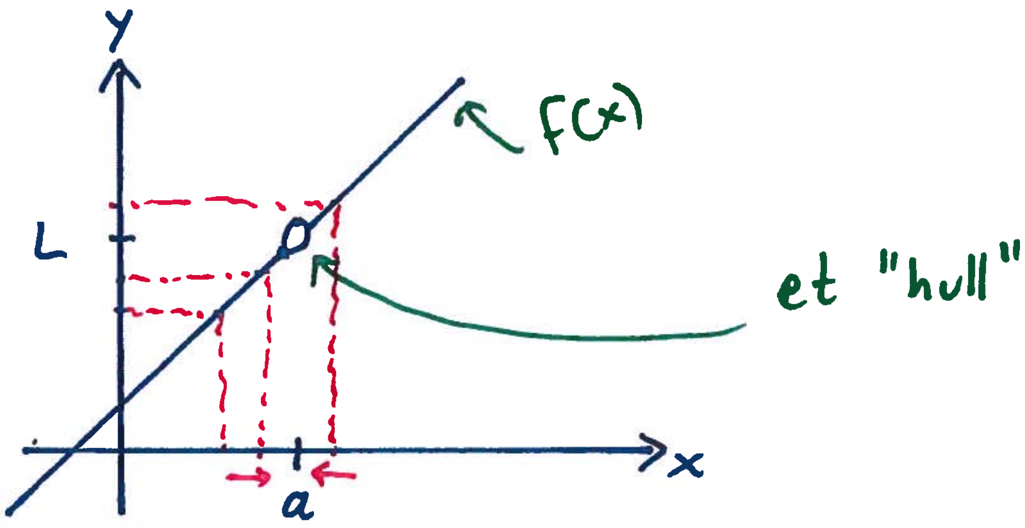
$$1-\cos x < x^2$$

$$\Rightarrow \quad 1-\cancel{x}^2 < \cos x \leq 1$$

Så skviseteoremet gir at

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

KAP. 2.3 Definisjon av grenser



Hva betyr $\lim_{x \to a} f(x)$?

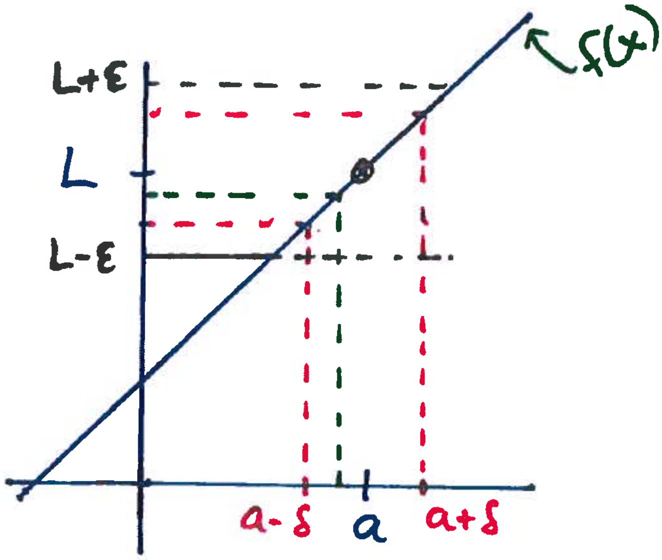
Intuitivt: Velger vi x-verdier nært $x=a$
får vi y-verdier nært L
Vi kan komme så nært vi ønsker til L
ved å velge x-verdier nært $x=a$.

Sagt på en annen måte:
For ethvert intervall rundt $y=L$ kan
vi alltid finne et intervall rundt $x=a$
slik at så lenge vi bruker x-verdier
herifra, havner funksjonsverdiene i
intervallet på y-aksen.

DEFINISJON: (ε - δ -definisjon)

epsilon delta

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$



BETYR:

Til enhver $\varepsilon > 0$

kan vi finne en $\delta > 0$

slik at

dersom $0 < |x-a| < \delta$

så er $|f(x) - L| < \varepsilon$

EKSEMPEL

Bevis at

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x(x-1)}{x-1} = 3$$

MED ANDRE ORD:

Gitt $\varepsilon > 0$, finn $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x-1| < \delta \implies \left| \frac{3x(x-1)}{x-1} - 3 \right| < \varepsilon$$

Kan kansellere siden $x \neq 1$

LØSNING:

$$|3x - 3| = |3(x-1)| = 3|x-1|$$

Så

$$\left| \frac{3x(x-1)}{x-1} - 3 \right| < \varepsilon$$

"samme som"

$$\iff 3|x-1| < \varepsilon$$

$$\iff |x-1| < \varepsilon/3$$

Så lenge $|x-1| < \varepsilon/3$, så er $\left| \frac{3x(x-1)}{x-1} - 3 \right| < \varepsilon$

KAN BRUKE $\delta = \varepsilon/3$!

(Eksempel: Hvis vi får $\varepsilon = 1$, får vi $\delta = 1/3$)

Definisjonen brukes til å vise teoremer

For eksempel:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = M$$

(i) $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = L+M$

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = L\cdot M$

osv...

La oss ta (i):

Altså, vil vise at gitt en $\varepsilon > 0$ kan vi finne en $\delta > 0$ slik at

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |(f(x)+g(x))-(L+M)|<\varepsilon$$

Vi vet følgende: det finnes δ_1 og $\delta_2 > 0$ slik at

$$0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon/2$$

$$0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-M|<\varepsilon/2$$

(per def.) av de to grensene for f og g "$\varepsilon = \varepsilon/2$"

La nå

$$\delta = \text{minste av } \delta_1 \text{ og } \delta_2 .$$

Da vil

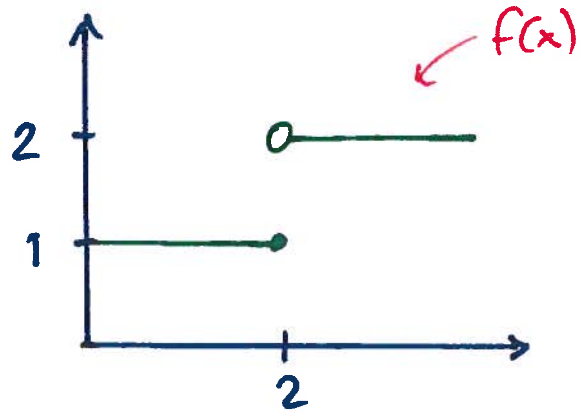
$$0 < |x-a| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x)-L| + |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$|(f(x)+g(x)) - (L+M)| < \varepsilon$$

KONTINUITET



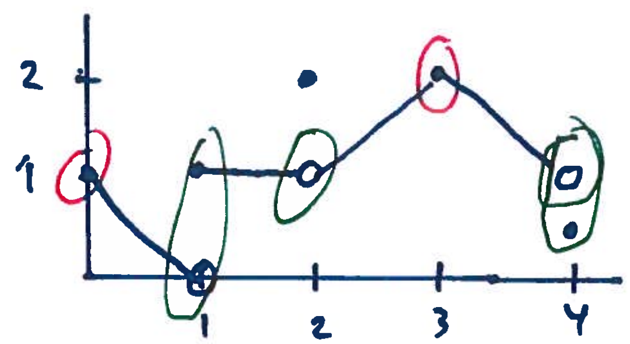
Kontinuerlig i $x = 2$?

NEI Den "hopper"

Intuitivt:

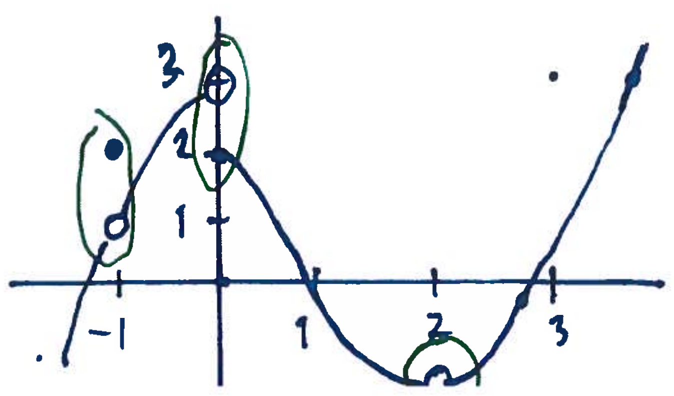
"En funksjon er kontinuerlig dersom grafen "henger sammen""

EKSEMPEL:



O kontinuerlig

O ikke kontinuerlig



hopp
−1: fordi grense er ikke samme som $f(-1)$

0: grensen finnes ikke

2: $f(2)$ finnes ikke

I MORGEN:

- Kontinuitet
- Derivasjon: definisjon og regneregler

UKE 34	Mandag 22/8	Tirsdag 23/8	Onsdag 24/8	Torsdag 25/8	Fredag 26/8
08:15–09:00					
09:15–10:00	Matte 1		Matte 1	Matte 1	
10:15–11:00		Matte 1			Prosjekt
11:15–12:00	Lunsjpause	Lunsjpause	Lunsjpause	Lunsjpause	Lunsjpause
12:15–13:00		Grupperefleksjon			Presentasjon
13:15–14:00	Prosjekt		Prosjekt	Prosjekt fram til kl. 14.30	
14:15–15.00		Fra kl. 13:45 Prosjekt			Evaluering TS
15:15–16:00				Grupperefleksjon	