TMA4100 – Matematikk 1

MTDESIG/IØT/MART/PROD

Alexander Lundervold

Teknostart. Forelesning 3, 22.08.2011

UKE 34	Mandag 22/8	Tirsdag 23/8	Onsdag 24/8	Torsdag 25/8	Fredag 26/8
08:15–09:00	Matte 1		Matte 1	Matte 1	
09:15–10:00					
10:15–11:00		Matte 1			Prosjekt
11:15–12:00	Lunsjpause	Lunsjpause	Lunsjpause	Lunsjpause	Lunsjpause
12:15–13:00	Prosjekt	Grupperefleksjon	Prosjekt	Prosjekt fram til kl. 14.30	Presentasjon
13:15–14:00		Fra kl. 13:45 Prosjekt			
14:15–15.00					Evaluering TS
15:15–16:00				Grupperefleksjon	

ØVING

Forrige uke:

- Funksjoner: definisjon og eksempler
- Trigonometriske funksjoner
- Eksponensialfunksjoner
- Inverse funksjoner
- Logaritmer

Husk:

Inverse funksjoner:

Dersom f er en *en-til-en-funksjon* fra D til R finnes det en *invers* f^{-1} fra R til D slik at

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \tag{1}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \tag{2}$$

Logaritmer:

Logaritmer er inverse til eksponensialfunksjoner:

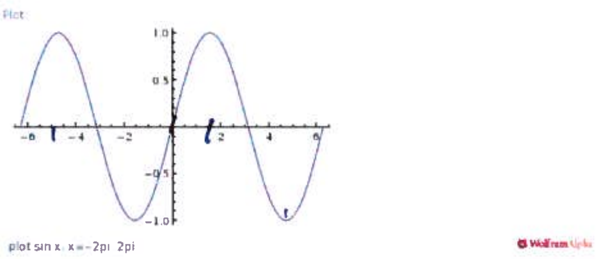
$$a^{\log_a(x)} = x, \qquad a \in (0, \infty)$$

$$\log_a(a^x) = x, \qquad a \in (0, \infty)$$

Vi så også noen *regneregler for logaritmer*.

Inverse trigonometriske funksjoner:

De trigonometriske funksjonene $\sin(x)$, $\cos(x)$ og $\tan(x)$ er ikke en-til-en, og har dermed ikke inverser.



MEN: Ved restriksjon av definisjonsomerådene blir de en-til-en, og har inverser:

Definisjon: Funksjonen $\sin^{-1}(x)$ (eventuelt $arcsin(x)$) er den inverse til $\sin(x)$ der $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Altså: $y = \sin^{-1}(x)$ er tallet i $[-\pi/2, \pi/2]$ som er slik at $\sin(y) = x$.

Det finnes også inverser til $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$, $\sec(x)$, $\csc(x)$ på visse definisjonsmengder.

NB!

Nevnt tidligere, men verdt å nevne igjen:

Les i læreboken, og jobb med oppgaver

Alle detaljer blir ikke gjennomgått på forelesningene.

Tips: les i boken *før* hver forelesning

I DAG:

GRENSER

Et superviktig konsept som ligger til grunn for *alt vi skal lære i resten av kurset.*

Men (heldigvis) basert på en

veldig enkel idé

SE PÅ FUNKSJONEN

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

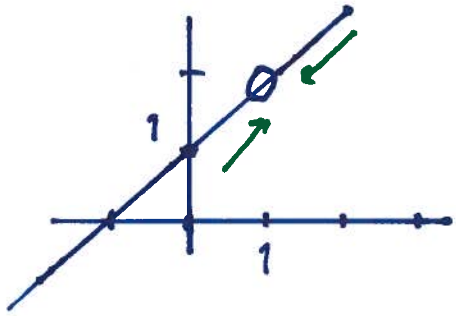
MERK:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$f(1) = \frac{1^2-1}{1-1} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \quad !!$$

UDEFINERT !

Har at $\quad f(x) = x+1 \quad , \quad x \neq 1$



Hva hvis x nærmer seg 1 ?

x	$f(x)$
0.9	1.9
0.99	1.99
1.1	2.1
1.01	2.01

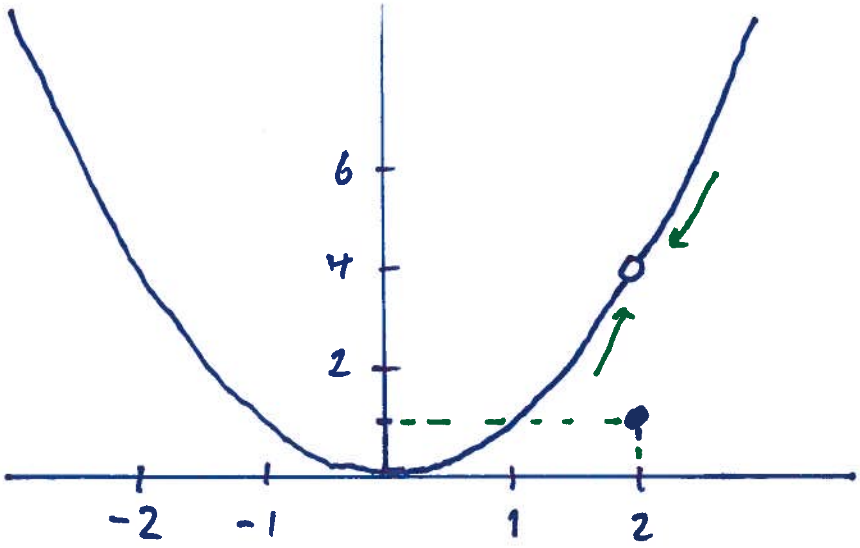
$f(x)$ nærmer seg 2 !

Med andre ord:

$$\boxed{\lim_{x \to 1} f(x) = 2}$$

[redacted]

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$



Hva er f(x) når x nærmer seg 2?

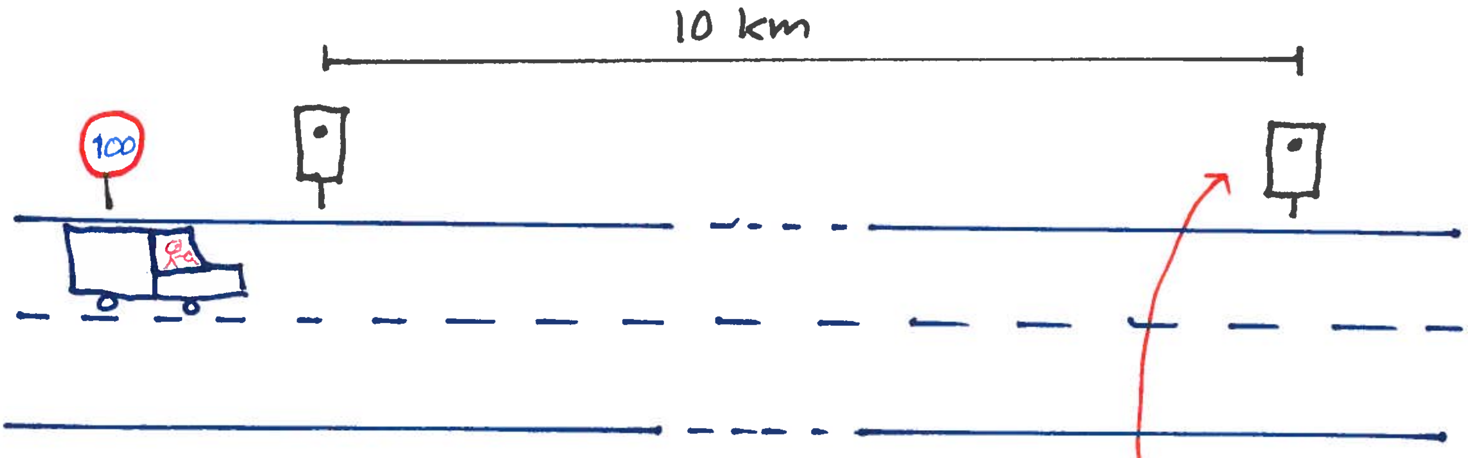
x	$f(x)$
1.9	$(1.9)^2 = 3.61$
1,99	3.960
1.999	3.996
2.01	4.040
2.001	4.004

$$\boxed{\lim_{x \to 2} f(x) = 4}$$

MERK:

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2) \quad (=1)$$

EKSEMPEL: INSTANTANFART



Fotobokser
(måler gj. fart)

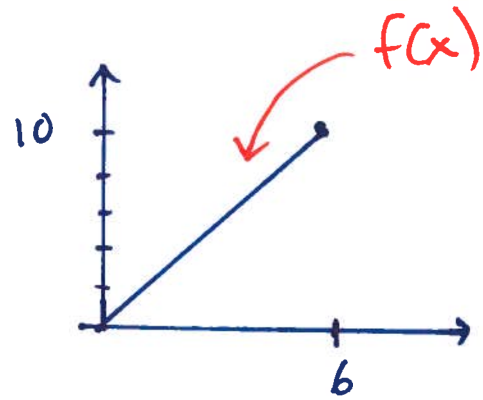
TID: 6 min

Gjennomsnittsfart: Tilbakelagt avst / brukt tid

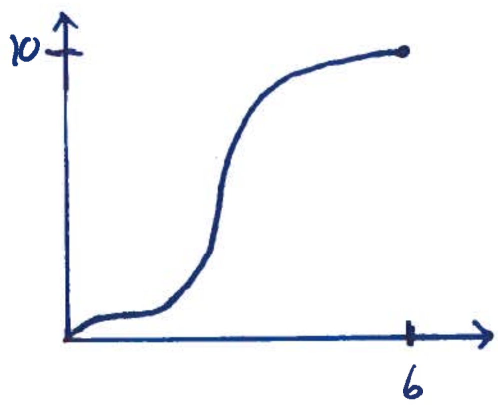
100 km/t

Hvis konstant fart:

LOVLIG
KJØRING



Variabel
fart:



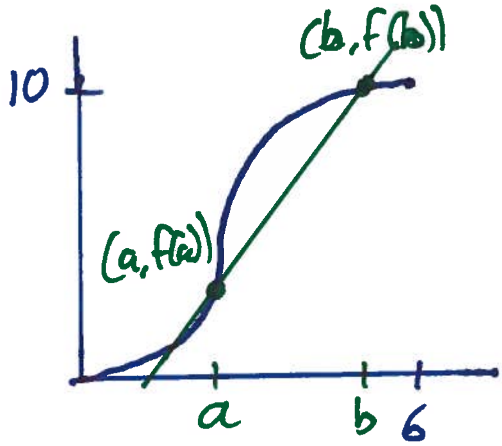
← ULOVLIG

Instantanfart
> 100 km/t

(men blir ikke tatt)

MULIG LØSNING:

Sett fotoboksene nærmere hverandre



Gjennomsnittsfart mellom a og b:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \left(= \frac{\Delta \text{ avstand}}{\Delta \text{ tid}} \right)$$

Geometrisk sett: stigningstallet til sekanten gitt ved a og b

Instantanfart i a får vi ved å flytte b så avstanden mellom a og b går mot 0

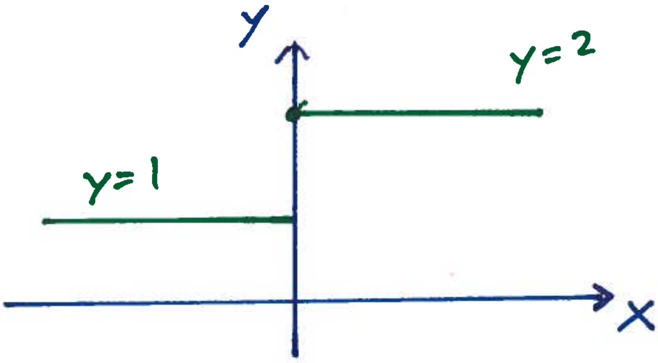
$$\text{Inst.fart i } a = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

der h er avstanden mellom a og b

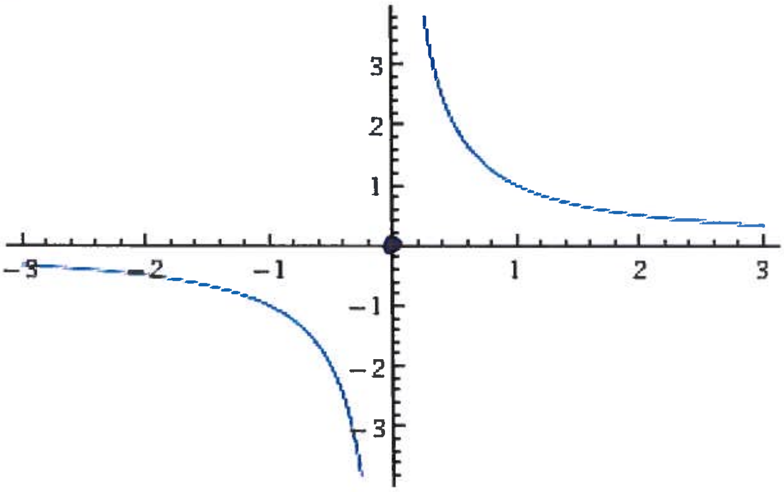
MYE MER OM DETTE SENERE

EKSEMPEL 3

$$y = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$$



Plot:



plot 1/x, x=−3..3

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Disse grensene eksisterer ikke i $x = 0$

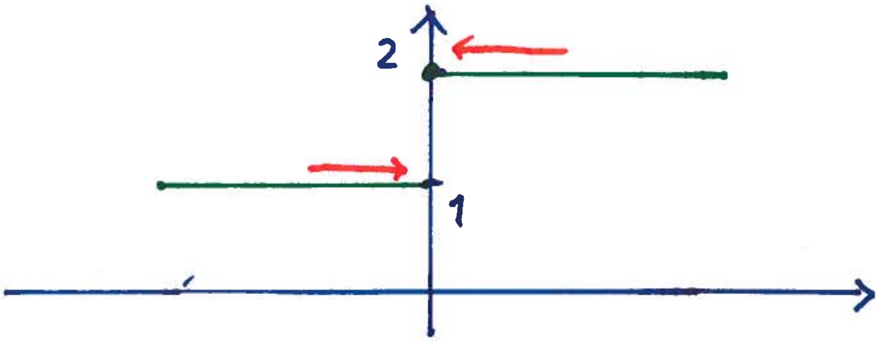
En-sidige grenser (Kap. 2.4)

En funksjon $f(x)$ har grense L når x nærmer seg c hvis og bare hvis

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

venstre-sidig grense

høyre-sidig grense



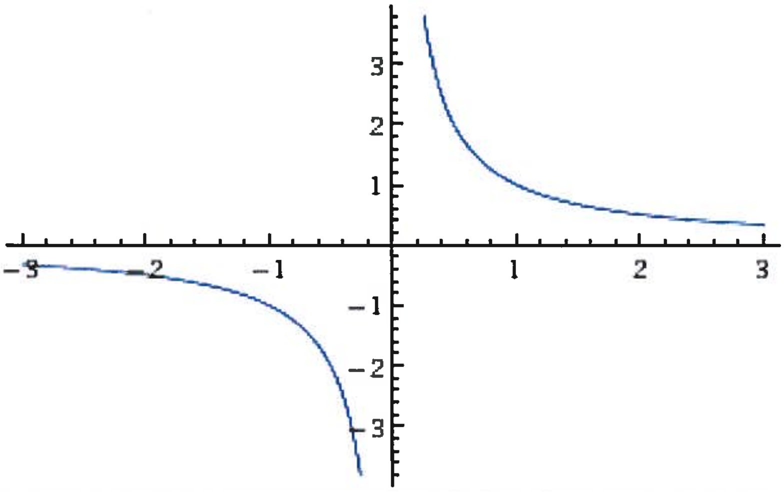
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$$

ULIKE GRENSER

Plot:



plot 1/x, x=-3..3

WolframAlpha

$f(x) = 1/x \quad , \; x \neq 0$

UENDELIGE GRENSER (KAP. 2.5)

$f(x) = 1/x$ har ingen grense i $x=0$.

Har heller ingen en-sidige grenser

$x \to 0^-$, $x \to 0^+$

VI SKRIVER

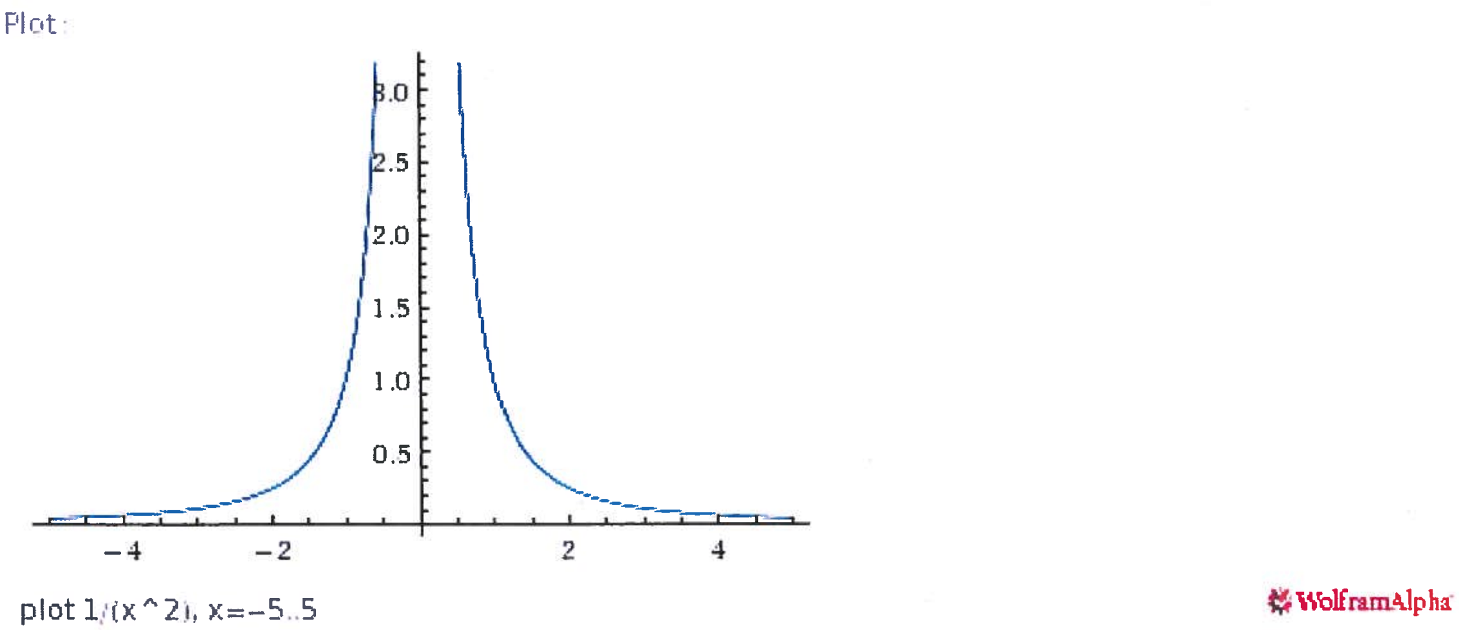
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (1/x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1/x) = +\infty$$

NB! Dette er bare notasjon ; grensene eksisterer ikke

EKSEMPEL:

$$f(x) = 1/x^2 \quad , \quad x \neq 0$$



HER ER

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$$

Vi skriver da

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$

NB! EKSISTERER IKKE

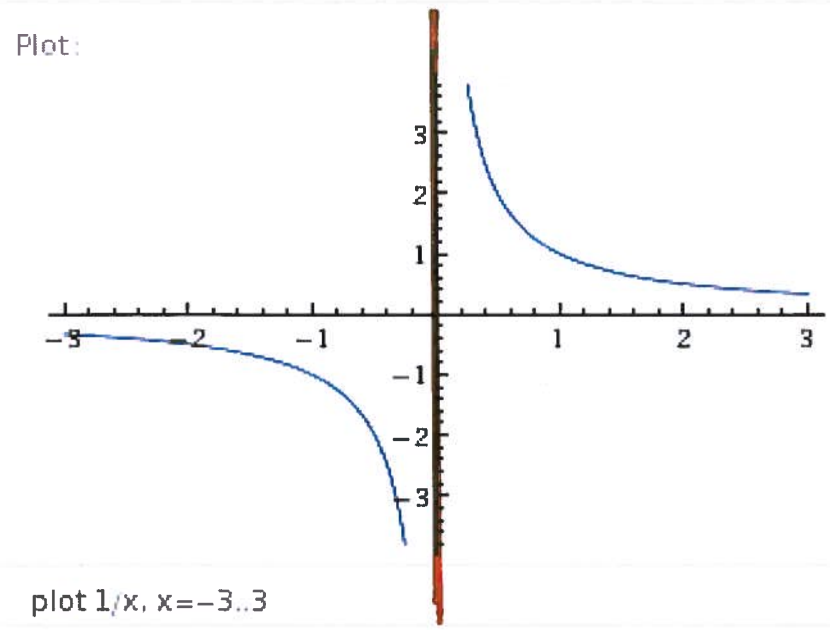
VERTIKALE ASYMPTOTER

En linje $x = a$ er en vertikal asymptote til grafen til en funksjon $y = f(x)$ dersom

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

ELLER

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$



$x = 0$ er en vertikal asymptote til

$$f(x) = 1/x \quad , x \neq 0$$

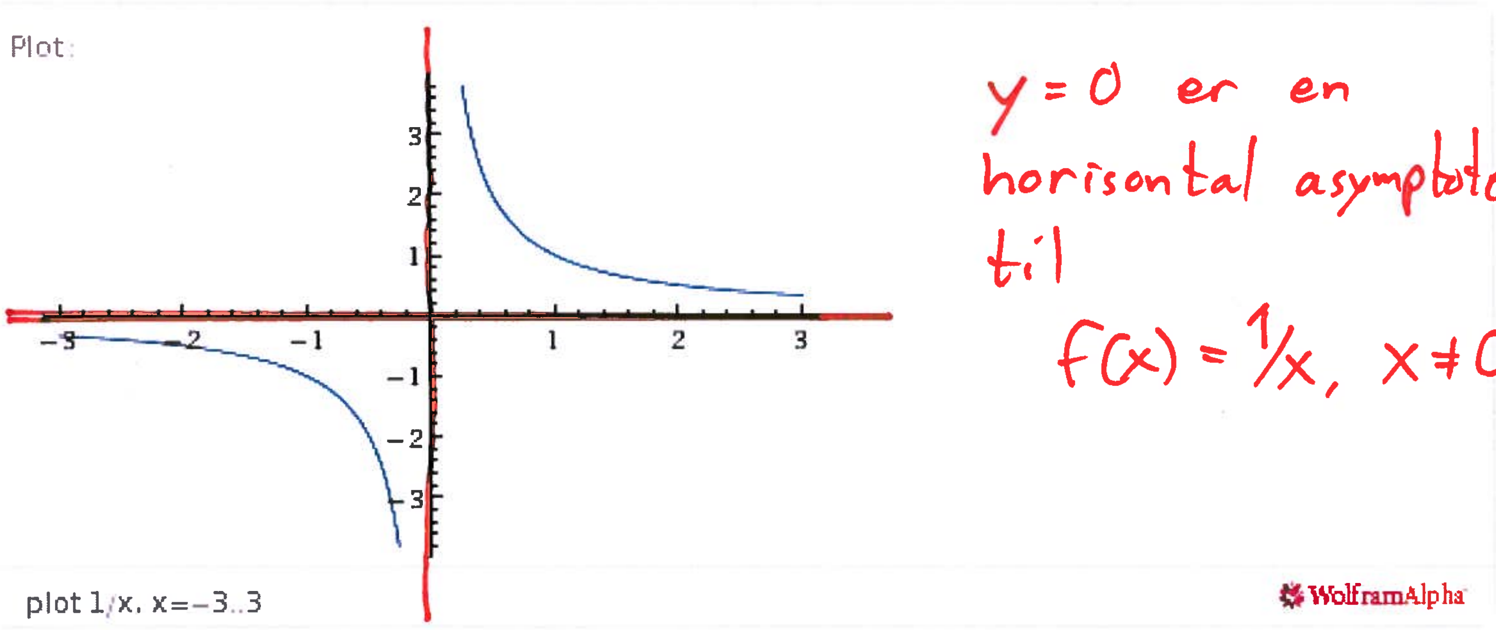
HVA MED HORISONTALE ASYMPTOTER ?

En linje $y = b$ er en horisontal asymptote til grafen til en funksjon $y = f(x)$ dersom

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

ELLER

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$



$y = 0$ er en horisontal asymptote til

$f(x) = 1/x, \ x \neq 0$

Noen regneregler for grenser:

La $L = \lim_{x\to a} f(x)$ og $M = \lim_{x\to a} g(x)$.

(i) $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$

(ii) $\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

(iii) $\lim_{x\to a} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$, der k en konstant

(iv) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, så lenge $M \neq 0$

(v) $\lim_{x\to a} \left(f(x)^{r/s}\right) = L^{r/s}$, der r og s er heltall uten felles faktorer, og $L^{r/s}$ må være et reelt tall. Dersom s er et jamnt tall, må $L > 0$

DISSE HOLDER OGSÅ FOR ENSIDIGE OG ~~[illegible]~~ GRENSER I DET UENDELIGE
$(x \to \pm\infty)$

En konsekvens:

(*) Dersom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ er et polynom, så er

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots a_1 c + a_0.$$

EKSEMPLER :

1. $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+2x^2-1}{x+1}$$

$$\stackrel{(iv)}{=} \frac{\lim_{x\to 2}(x^3+2x^2-1)}{\lim_{x\to 2}(x+1)}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{(2)^3+2\cdot(2)^2-1}{(2)+1}$$

$$= \frac{15}{3} = \underline{\underline{5}}$$

2.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

NB: IKKE DEFINERT I $x = 1$

Har at $f(1) = 0$

så $(x-1)$ er en faktor i $f(x)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{x\cancel{(x-1)}}$$

OBS: Kan kansellere faktorer så lenge $x \neq 1$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x}$$

$$= \frac{3}{1} = \underline{\underline{3}}$$

3.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} f(x)$$

MERK: $f(x)$ blir "$\frac{0}{0}$" i $x=2$

Vi har at (for $x \neq 2$):

$$\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2} = \frac{(\sqrt{x^2+12}-4)(\sqrt{x^2+12}+4)}{(x-2)(\sqrt{x^2+12}+4)}$$

$$= \frac{x^2+12-16}{(x-2)(\sqrt{x^2+12}+4)} = \frac{x^2-4}{(x-2)(\ldots)}$$

$$= \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+12}+4)}$$

Kan kansellere $(x-2)$ så lenge $x \neq 2$

SÅ:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{2+2}{\sqrt{2^2+12}+4} = \frac{4}{8} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

4.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} \qquad \left(\text{"} = \frac{\infty}{\infty}\text{"}\right)$$

Del oppe og nede med høyeste grad av x

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2/x^2 + 8x/x^2 - 3/x^2}{3x^2/x^2 + 2/x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5 + 8/x - 3/x^2}{3 + 2/x^2} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$$

5. Finn asymptotene til

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$$

Vil se på $x \to \pm\infty$ og $x \to 2$.

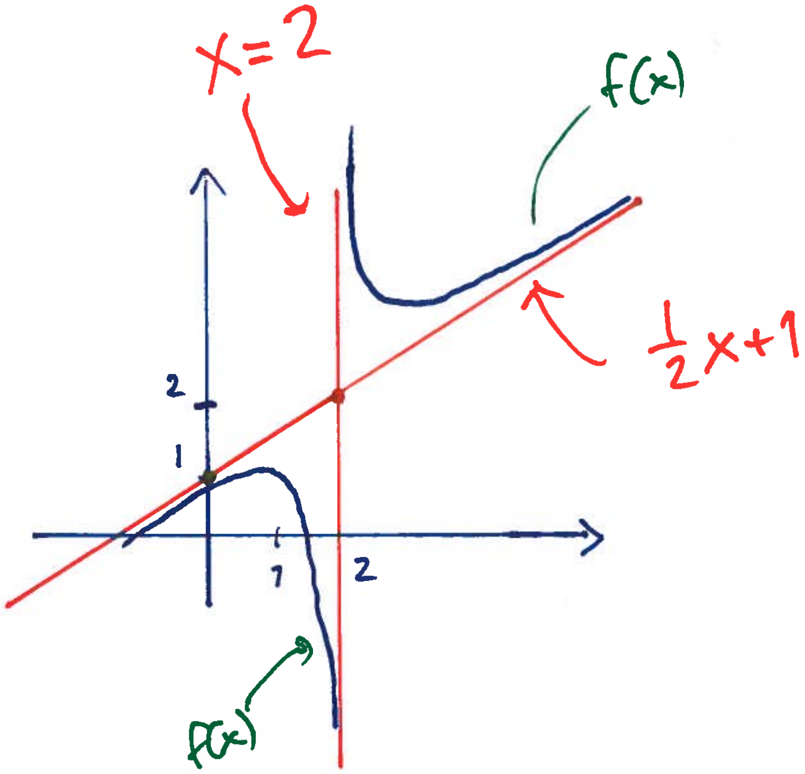
Polynomdivisjon gir

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x-4}$$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ $\Rightarrow$ $x=2$ er en tosidig vertikal asymptote

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ $\Rightarrow$ Linjen $\frac{x}{2}+1$ er en asymptote

Avst. mellom $f(x)$ og $\frac{x}{2}+1$ går mot 0



x=2
f(x)
$\frac{1}{2}x+1$
2
1
1
2
f(x)

I MORGEN:

- "SKVISETEOREMET"
- DEFINISJON AV GRENSER
- ~~ ~~

UKE 34	Mandag 22/8	Tirsdag 23/8	Onsdag 24/8	Torsdag 25/8	Fredag 26/8
08:15–09:00	Matte 1		Matte 1	Matte 1	
09:15–10:00					
10:15–11:00		Matte 1			Prosjekt
11:15–12:00	Lunsjpause	Lunsjpause	Lunsjpause	Lunsjpause	Lunsjpause
12:15–13:00	Prosjekt	Gupperefleksjon	Prosjekt	Prosjekt fram til kl. 14.30	Presentasjon
13:15–14:00		Fra kl. 13:45 Prosjekt			
14:15–15.00					Evaluering TS
15:15–16:00				Gupperefleksjon	