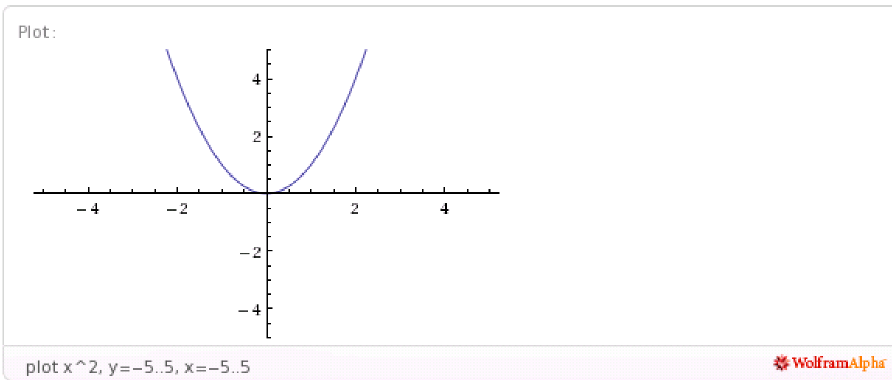
Her er forslag til løsninger på Oppgave 16 og Oppgave 23 på Teknostart-settet. Det var litt forvirring rundt disse, så her er et forsøk på klargjøring :-)

Oppgave 16:

Har $y = x^2$ noen tangentlinjer som går gjennom punktet $(0, -2)$?

Løsning:
Intuitivt kan vi forvente at svaret er "ja". Se på grafen til $y = x^2$:



Trekker man tangentlinjer fra grafen og ned til y-aksen så treffer disse enhver y-verdi.

Dette er "intuitivt", den *skikkelige* løsningen på problemet er som følger: En rett linje som går gjennom punktet (x_0, y_0) har ligningen

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Linjen vi skal se på ønsker vi at skal gå gjennom punktet $(x_0, y_0) = (0, -2)$, så

$$y + 2 = mx. \tag{1}$$

Stigningen m er konstant, og siden den skal være en tangent til $y = f(x)$ er stigningen lik $f'(a) = 2a$, der $x = a$ er punktet på x-aksen der tangentlinjen skjærer grafen til funksjonen (tangentlinjen i et punkt har stigning lik stigningen til funksjonen i punktet). Når skjærer tangentlinjen grafen til $f(x)$? Jo, når $y = x^2$ og $x = a$ i Ligning 1. Altså når

$$a^2 + 2 = 2 \cdot a \cdot a \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}.$$

Tangentlinjen skjærer grafen til $y = x^2$ i punktet $x = \pm\sqrt{2}$. Hva er stigningstallet til $y = f(x)$ der? Jo, $f'(\pm\sqrt{2}) = \pm 2\sqrt{2}$.

Dermed, det er to tangenter som går gjennom $(0, -2)$, og de har ligninger

$$y = 2\sqrt{2}x - 2$$
$$y = -2\sqrt{2}x - 2$$

Oppgave 23:

Anta at f er kontinuerlig på intervallet $[0,1]$ og at $0 \leq f(x) \leq 1$ for alle $0 \leq z \leq 1$. Vis at det finnes et tall c i $[0,1]$ slik at $f(c) = c$ (altså et *fikspunkt* til f).

Løsning:
Trikset her er å se på funksjonen $g(x) = f(x) - x$. Den er kontinuerlig fordi den er summen av to kontinuerlige funksjoner. Har at $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$ og at $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$, fordi f tar verdier mellom 0 og 1. Bruker vi nå *skjæringssetningen* på funksjonen $g(x)$ ser vi at det må finnes en c i $[a,b]$ som er slik at $g(c) = 0$. Men $g(c) = 0$ er det samme som at $f(c) = c$!