KAP. 6: ANVENDELSER AV INTEGRASJON

Volum, kurvelengde, diff. ligninger, arbeid

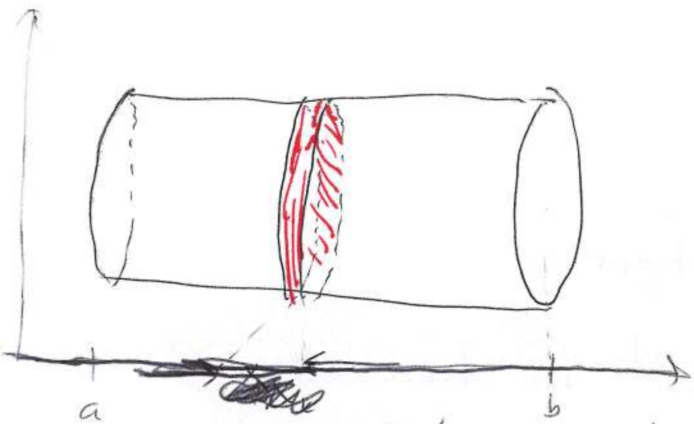
massesenter

MÅL: Formulere tilnærmet løsning som sum ; slik at eksakt løsn. blir integral.

6.1. SKIVEMETODEN FOR VOL.BEREGNING OG ROTASJON OM AKSER

MOTIVASJON/EKSEMPEL:

Finn volumet av:



Del opp i skiver ved å bruke en partisjon $a = x_0 \le x_1 \le \dots \le x_n = b$

$\Delta x_k \approx$ tykkelse på skive k

Dersom vi kjenner arealet av skivene, $A(x)$, er volumet til skive k gitt ved

$$V_k \approx A(x_k)\Delta x_k$$

(grunnflate) × (høyde)

Hele volumet:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} V_k \approx \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k$$

Riemann-sum

<u>DEFINISJON</u>: Volumet til et legeme med kjent tverrsnittareal $A(x)$ fra a til b er

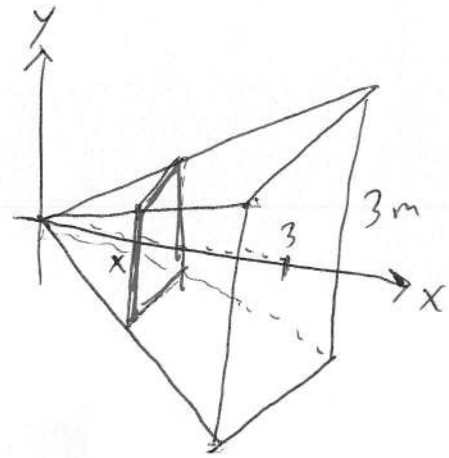
$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

<u>METODE</u>:

1. Tegn figur
2. Finn formel for tverrsnittareal
3. Finn integrasjonsgrenser
4. Beregn integral

EKSEMPEL: Finn volumet til en pyramide ~~[illegible]~~ som er 3m høy, har kvadratiske tverrsnitt, og base med sider på 3m.

1. Figur



2. Formel for $A(x)$:

$$A(x) = x \cdot x = x^2$$

3. Integrasjonsgrenser:

$$x = 0 \quad \text{og} \quad x = 3$$

4. Integrer

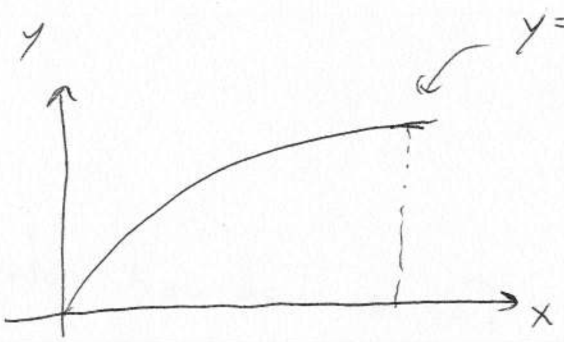
$$V = \int_0^3 A(x)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^3$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 3^2 = \underline{\underline{9\,m^3}}$$

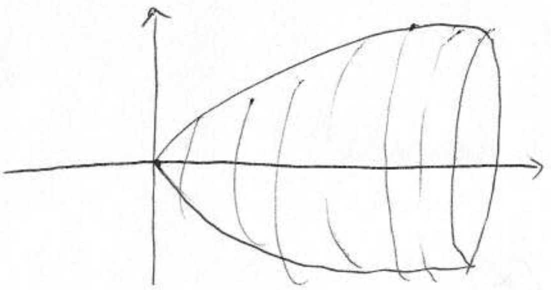
MERK: Volumet til en pyramide er $\frac{1}{3}$(grunnflate × høyde) ~~[illegible]~~

VOLUMET TIL OMDREININGSLEGEMER

DISK-METODEN

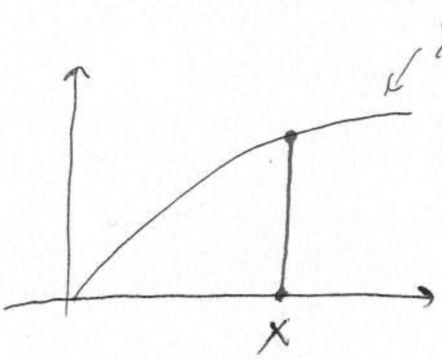


Rotert om x-aksen:



Hva er volumet?

IDÉ: Finn tverrsnittarealet $A(x)$ ved å rotere skiver om x-aksen:



Danner en <u>disk</u>

Radius: $y=f(x)$

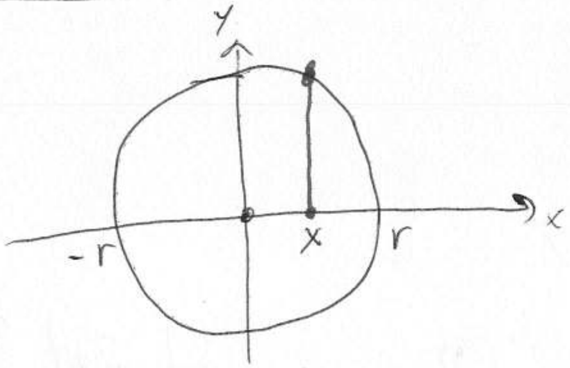
Areal: $A(x) = \pi y^2$

$$= \pi [f(x)]^2$$

Volumet av legemet:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2\,dx$$

EKSEMPEL:



Får en ball ved rotasjon om x-aksen.

Hva e volumet?

STEG 1: Figur. OK (3D ikke nødvendig!)

STEG 2: Finn formel for $A(x)$

$$A(x) = \pi y^2$$

Formel for sirkelen: $x^2 + y^2 = r^2$. Så $y^2 = r^2 - x^2$

Dermed $A(x) = \pi(r^2 - x^2)$

STEG 3: Integrasjonsgrenser:

$$x = -r, \quad x = r$$

STEG 4:

$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi (r^2 - x^2)\,dx$$

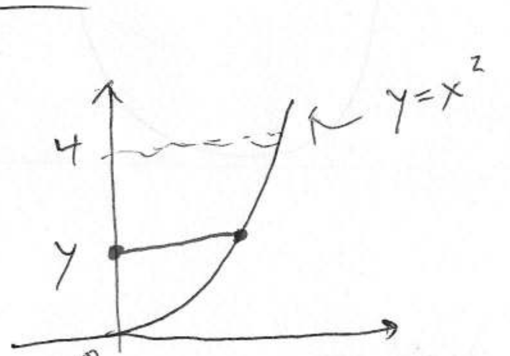
$$= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^{r}$$

$$= \pi \left(r^3 - \frac{1}{3} r^3 - \left(-r^3 + \frac{1}{3} r^3\right) \right)$$

$$= \underline{\frac{4}{3} \pi r^3}$$

ROTASJON OM y-AKSEN:

EKSEMPEL:



$$V = \int_0^4 A(y)\,dy$$

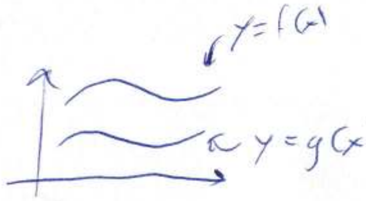
$$= \int_0^4 \pi \,[\text{radius}]^2\,dy$$

$$= \int_0^4 \pi (\sqrt{y})^2\,dy$$

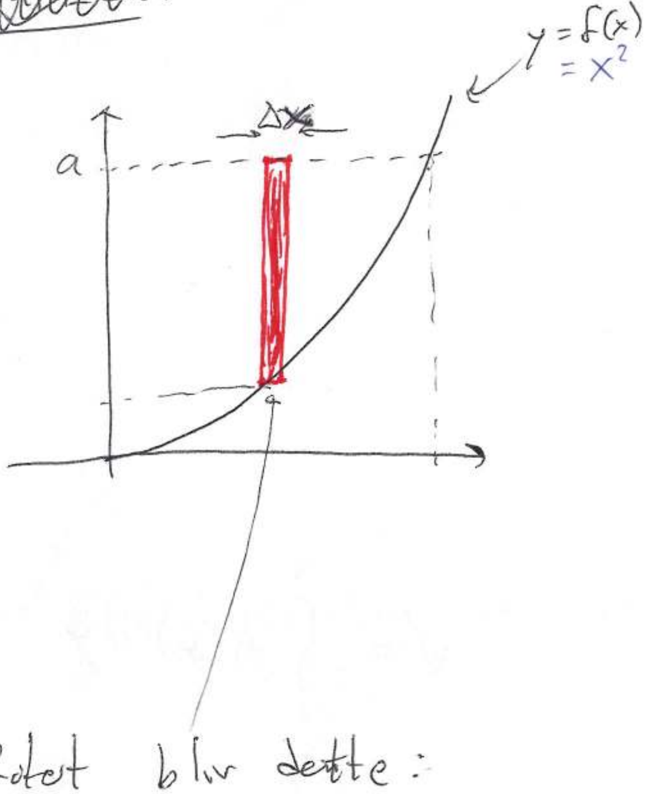
$$= \int_0^4 \pi y \, dy = \left[\frac{\pi}{2} y^2 \right]_0^4$$

$$= \underline{8\pi}$$

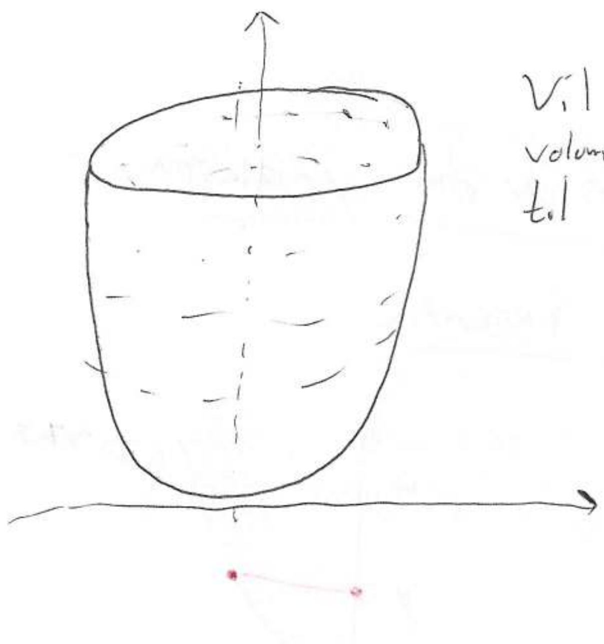
Navn ~~[illegible]~~ "vaskemaskin-metoden"



KAP. 6.2. Sylinderskall-metoden

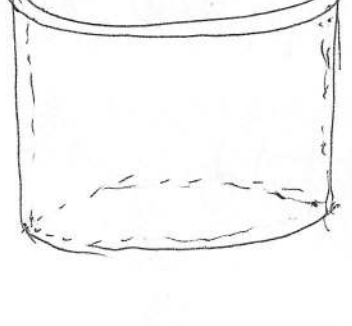


Rotert om y-aksen



Vil finne volumet til denne

Rotert blir dette:



Volum:

Tykkelse er Δx_k

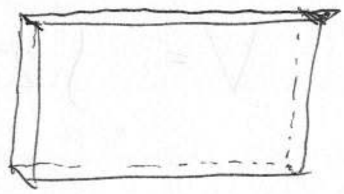
Høyde: $a - y_k = a - f(x_k)$

Omkrets: $2\pi(\text{radius})$

$= 2\pi x_k$

Volumet av sylinderskallet blir altså

(Rullet ut:



$$V_k = 2\pi x_k (a - y_k)\,\Delta x_k$$

Integrasjonsgrenser: $x = 0$, $x = \sqrt{a}$

Volumet til legemet:

$$V = \int_0^{\sqrt{a}} 2\pi x\,(a-y)\,dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{a}} 2\pi x\,(a - x^2)\,dx$$

$$= \left[2\pi a \cdot \tfrac{1}{2} x^2 - 2\pi \cdot \tfrac{1}{4} x^4 \right]_0^{\sqrt{a}}$$

$$= \pi \left[a x^2 - \tfrac{1}{2} x^4 \right]_0^{\sqrt{a}}$$

$$= \pi \left[a^2 - \tfrac{1}{2} a^2 \right] = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\pi a^2}}$$

MERK: Dersom $a = 4$ får vi

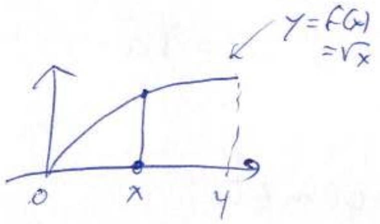
$$V = 8\pi$$

som før

Generelt:

$$V = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi \begin{pmatrix}\text{skall}\\ \text{-radius}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{skall}\\ \text{-høyde}\end{pmatrix} dx$$

Eks.



skall-radius : x

Skallhøyde : $\sqrt{x}$

integrasjonsgrenser : $x=0$, $x=4$

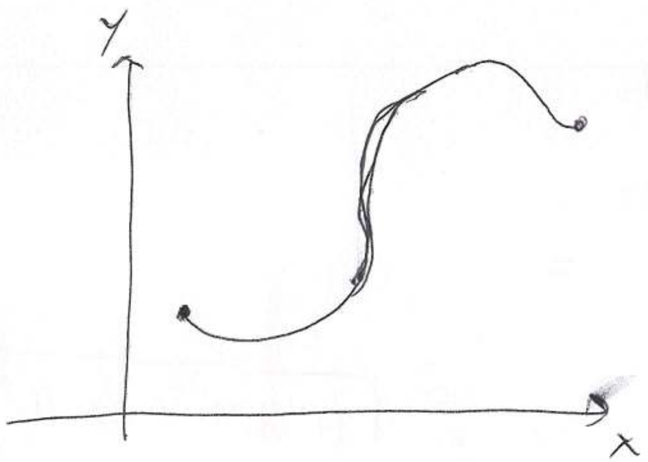
MERK: Kan også rotere om andre akser.

Bytt x og y og vi roterer om horisontale akser

KAP. 6.3 KURVELENGDE

La C være en parametrisk kurve

$$x = f(t) \qquad a \le t \le b$$
$$y = g(t)$$



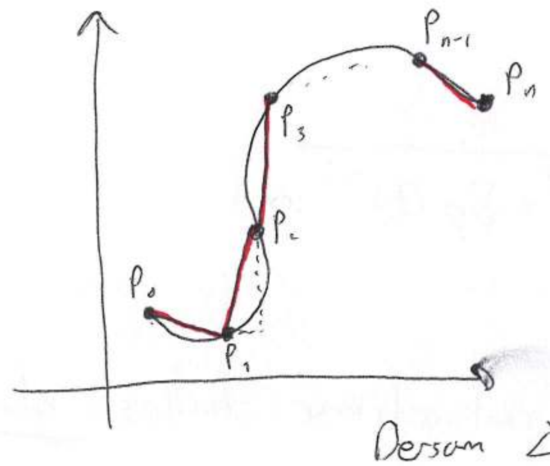
Hvor lang er kurven?

IDÉ: Del opp intervallet $[a,b]$

Linjal

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

Dette gir en oppdeling av kurven i segmenter



Trekk rette linjer mellom punktene $P_k = (f(t_k), g(t_k))$

Lengden av linje k:

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

(= lengden av "hypotenusen")

$$= \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2}$$

Dersom Δt_k er liten vil $L_k \approx$ lengden av segmentet $P_{k-1}P_k$.

SEKANTSETNINGEN :

$$\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k} = \frac{f(t_k)-f(t_{k-1})}{\Delta t_k} = f'(t_k^*)$$

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta t_k} = \frac{g(t_k)-g(t_{k-1})}{\Delta t_k} = g'(t_k^{**})$$

for tall t_k^*, t_k^{**} i $[t_{k-1}, t_k]$

Dermed :

$$\Delta x_k = f'(t_k^*)\Delta t_k$$

$$\Delta y_k = g'(t_k^{**})\Delta t_k$$

og

lengden av kurven $\approx \sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(t_k^*)]^2 + [g'(t_k^{**})]^2}\,\Delta t_k$

DEFINISJON : Anta f' og g' kontinuerlig, og at f' og g' aldri er null samtidig på $[a,b]$, og at $x(t) = f(t)$, $y(t) = g(t)$, gir en kurve C som gjennomgås nøyaktig en gang når t går fra $t=a$ til $t=b$.

Lengden av C :

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$$

MERK: Kurver som tilfredstiller antagelsene kalles glatte.