REKKER, KONVERGENS, FEILESTIMERING

Rekker:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

$$= \lim_{N\to\infty} (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_N)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} a_n}_{\text{delsom}}$$

Konvergens:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ <u>konvegerer</u> dersom grensen $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$ eksisterer.

Dersom $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = S$ kaller vi S <u>summen</u> av rekken:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$$

EKSEMPEL:

Geometriske rekker:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \quad \text{dersom } |r| < 1$$

Divergerer dersom $|r| \geq 1$

p-rekker:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konvergerer dersom $p > 1$
divergerer dersom $p \leq 1$

Kan teste hvorvidt en rekke konvergerer (uten å finne summen):

KONVERGENSTESTER

- $\sum a_n$ divergerer dersom $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$

For rekker med positive ledd:

- Integraltesten: Dersom f er kontinuerlig, avtagende og positiv så vil
  $\sum_0^\infty f(n)$ konvergere hvis og bare hvis
  $\int_0^\infty f(x)\,dx$ konvergerer

- Sammenligningstesten: Dersom $a_n \leq b_n$ og $\sum b_n$ konvergerer, så vil $\sum a_n$ konvergere.

  Dersom $a_n \geq c_n$ og $\sum c_n$ divergerer, så vil $\sum a_n$ divergere.

- **Grensesammenligning:** Dersom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \quad \text{der} \quad 0 < k < \infty$$

så vil $\sum a_n$ og $\sum b_n$ enten <u>begge</u> konvergere eller <u>begge</u> divergere

- **Forholdstesten:** Anta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

Dersom

$\rho < 1$ vil $\sum a_n$ konvergere

$\rho > 1$ vil $\sum a_n$ divergere

$\rho = 1$ ingen informasjon (bruk annen test)

- **rot-testen:** Anta

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

$\rho < 1 \Rightarrow$ konvergens $\sum a_n$

$\rho > 1 \Rightarrow$ divergens

$\rho = 1 \Rightarrow$ ingen informasjon

For <u>alternerende rekker</u> $\left[\sum (-1)^n a_n\right]$:

Dersom (i) $a_n \geqslant 0$ (positiv)

(ii) $a_{n+1} < a_n$ (avtagende)

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

så vil $\sum (-1)^n a_n$ konvegere

Husk:

- Sammenligningstestene trenger noe å sammenligne med

  ↳ F. EKS:
  p-rekker $\sum \frac{1}{n^p}$

  geometriske rekker $\sum ar^n$

- $\sum_{0}^{\infty} a_n$ konvergerer/divergerer

  $\Leftrightarrow \sum_{N}^{\infty} a_n$ konvergerer/divergerer

- Integraltesten og alternerende rekke-testen kommer med feilestimat:

Dvs. dersom vi bruker en delsum $\sum_{0}^{N} a_n$ som tilnærming av $S = \sum_{0}^{\infty} a_n$, så kan vi si noe om feilen

$$R_N = \sum_{0}^{\infty} a_n - \sum_{0}^{N} a_n$$

- $$\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq R_N \leq \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx$$

  $[\, f(n) = a_n \,]$

- $|R_N| \leq |$ første utelatte ledd$|$

  $= |a_{N+1}|$

  $[\, \sum a_n$ er alternerende $]$

HVA MED REKKER SOM IKKE BARE HAR POSITIVE LEDD ?

Absolutt konvergens dersom $\sum |a_n|$ konvergerer

positive ledd

Husk:

Absolutt konvergens $\Rightarrow$ konvegens

Ikke nødvendigvis motsatt (betinget konvegens)

Eks: $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergerer

$\sum_{1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer

Så $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergerer betinget

En viktig type rekker:

POTENSREKKER

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

En viktig type potensrekker:

TAYLORREKKER

Taylorrekken rundt $x=a$ til en funksjon f er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

Sjekker konvergens ved hjelp av

- forholdstesten
- rot-testen

Delsummene til Taylorrekker brukes til å tilnærme funksjoner.

Delsummene kalles Taylorpolynomer.

TAYLORS FORMEL:

Dersom f er vendelig deriverbar på et intervall I rundt $x=a$ så er

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

$$= P_n(x) + R_n(x)$$

for $x \in I$, og

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

for en c mellom x og a.

Sier at Taylorrekken konvergerer til f dersom $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$