NTNU

Det skapende universitet

TMA4100 Matematikk 1 for MTDESIG, MTIØT-PP, MTMART og MTPROD høsten 2010

Toke Meier Carlsen
Institutt for matematiske fag

17. november 2010

Fremdriftplan

Siste uke

- **8.7** Potensrekker
- **8.8** Taylor- og Maclaurinrekker
- **8.9** Konvergens av Taylorrekker
- **8.10** Binomialrekker

I dag

- **8.9** Konvergens av Taylorrekker
- **8.10** Binomialrekker
- **15.1** Løsninger og retningsdiagrammer til første ordens diff-ligninger og Picards teorem

Regning med Taylorrekker

Vi kan danne nye potensrekker ut fra kjente potensrekker ved å

- Derivere
- Integrere
- Addere potensrekker
- Multiplisere med konstanter, x, x^2,...
- Substituere x med en annen variabel.

Det skapende universitet

Noen kjente Taylorrekker

1. $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k = (1+x)^m$ for $x \in (-1, 1)$.
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ for alle x.
3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x)$ for alle x.
4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(x)$ for alle x.

Det står flere Taylorrekker på side 571 i boka og på side 115–122 i Rottmann.

NTNU

Det skapende universitet

Anvendelser av Taylors teorem

- Vise at Taylorrekker konvergerer
- Utregninger av grenseverdier
- Estimat av integraler

NTNU
Det skapende universitet

Taylorrekken til en potensrekke

Merknad

Anta at potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ har konvergensradius $R > 0$ og at den konvergerer mot $f(x)$ når $|x-a| < R$.
Da er $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ Taylorrekken til f om punktet a.

NTNU
Det skapende universitet

Leibnizs teorem

Theorem 14 og 15 side 538–539

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ konvergerer dersom følgende 3 betingelser alle er oppfylte:

1. $u_n \geq 0$ for alle n.
2. $u_n \geq u_{n+1}$ for alle n.
3. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Dessuten er

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n - \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}u_k\right| \leq u_{N+1}$$

for alle N.

Førsteordens differensiallikninger

En førsteordens differensiallikning er en differensiallikning som kan skrives på formen

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

der f er en funksjon i to variabler.
En funksjon y er en løsning til differensiallikningen

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

på intervallet I hvis $y'(x) = f(x, y(x))$ for alle $x \in I$.

Løsninger til differensiallikninger

- Hver løsning til differensiallikningen kaller vi en *partikulær* (eller *spesiell*) løsning.
- Den *generelle løsningen* er familien av alle løsninger til differensiallikningen.

NTNU
Det skapende universitet

Initialverdiproblemer

Et *initialverdiproblem* består av en differensiallikning

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

og en *initialbetingelse*

$$y(x_0) = y_0.$$

NTNU
Det skapende universitet

Partielle deriverte

Definisjon

La (x_0, y_0) være et punkt i planen og la $f(x, y)$ være en funksjon i to variabler som er definert i punktet (x_0, y_0).
Hvis grenseverdien

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

eksisterer sier vi at f er *partiell deriverbar* med hensyn til x i punktet (x_0, y_0), og vi betegner grenseverdien med $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Partielle deriverte

Definisjon

Hvis grenseverdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

eksisterer sier vi at f er *partiell deriverbar* med hensyn til y i punktet (x_0, y_0), og vi betegner grenseverdien med $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

NTNU
Det skapende universitet

Picards Teorem

Theorem 1 side 15-5

La (x_0, y_0) være et punkt i planen, $\delta_1, \delta_2 > 0$ og la $f(x, y)$ være en funksjon i to variabler slik at f og $\frac{\partial f}{\partial y}$ er kontinuerlige i $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$.
Da finnes et $\epsilon > 0$ slik af differensialligningen

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

har nøyaktig en løsning g på intervallet $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ som oppfyller $g(x_0) = y_0$.

NTNU
Det skapende universitet

Oversettning til integrallikning

Funksjonen y er en løsning til initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

hvis og bare hvis y er en løsning til *integrallikningen*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

Picards iterasjons-metode

Vi la

$$
\begin{aligned}
y_1(x) =& y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt \\
y_2(x) =& y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt \\
&\vdots \\
y_n(x) =& y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt
\end{aligned}
$$

En kan da vise at y_n konvergerer mot en funksjon y som er en løsning til initialverdiproblemet.

NTNU
Det skapende universitet

Plan for i morgen

Torsdag 14:15–16:00 i R1

- **15.1** Retningsdiagrammer til første ordens diff-ligninger
- **15.2** Første ordens lineære diff-ligninger
- **15.3** Anvendelser av diff-ligninger

NTNU
Det skapende universitet