NTNU

Det skapende universitet

TMA4100 Matematikk 1 for MTDESIG, MTIØT-PP, MTMART og MTPROD høsten 2010

Toke Meier Carlsen

Institutt for matematiske fag

10. november 2010

Fremdriftplan

Siste uke

- **8.3** Integraltesten
- **8.4** Sammenligningstesten
- **8.5** Forholdstesten og rottesten
- **8.6** Alternerende rekker, absolutt og betinget konvergens
- **8.7** Potensrekker

I dag

- **8.7** Potensrekker
- **8.8** Taylor- og maclaurinrekker

NTNU
Det skapende universitet

Potensrekker

Definisjon side 544

En *potensrekke* med sentrum a er en funksjonsrekke på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots$$

der $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots$ er en følge av tall.

Konvergens av potensrekker

Theorem 18 side 547

Anta at potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer for $x = c$, hvor $c \neq 0$. Da konvergerer den absolutt for alle x slik at $|x| < c$.
Hvis rekken divergerer for $x = d$, da divergerer den for alle x slik at $|x| > d$.

NTNU
Det skapende universitet

Konvergens av potensrekker

Corollary to Theorem 18 side 548

La $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ være en potensrekke. Da er det 3 muligheter:

1. Potensrekken konvergerer for alle x.
2. Potensrekken konvergerer bare for $x = a$.
3. Det finnes et tall R slik at potensrekken konvergerer absolutt for alle x slik at $|x-a| < R$, og divergerer for alle x slik at $|x-a| > R$.

Tallet R kalles *konvergensradien* til $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$. Dersom potensrekken konvergerer for alle x sier vi at konvergensradien er ∞.

Dersom potensrekken konvergerer bare for $x = a$ sier vi at konvergensradien er 0.

Konvergens analyse av potensrekker

1. Anvend rottesten eller forholdstesten for å finne intervallet der rekken konvergerer absolutt.

$$|x - a| < R$$

2. Hvis intervallet er endelig. Sjekk konvergens på endepunktene. Bruk enten
    - en sammenlikningstest
    - integraltesten
    - eller alternerende rekketesten.
3. For $|x - a| > R$ divergerer potensrekken.

NTNU

Det skapende universitet

Formler for konvergensradius

La $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ være en potensrekke.

- Hvis $\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ konvergerer eller divergerer mot ∞ når $n \to \infty$ er konvergensradien lik $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$.
- Hvis $\sqrt[n]{|c_n|}$ konvergerer eller divergerer mot ∞ er konvergensradien lik $\frac{1}{L}$ der $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

Rottmann side 109.

Derivasjon av potensrekker

Theorem 19 side 549

Anta at $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ er en potensrekke med konvergensradius R.
Da er f deriverbar for alle x i intervallet $(a-R, a+R)$ og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}(x-a)^n$$

for alle $x \in (a-R, a+R)$.

NTNU
Det skapende universitet

Integrasjon av potensrekker

Theorem 20 side 550

Anta at $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ er en potensrekke med konvergensradius $R > 0$.
Da konvergerer rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n}(x-a)^n$$

for alle $x \in (a-R, a+R)$ og

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n}(x-a)^n$$

for $x \in (a-R, a+R)$.

Multiplikasjon av potensrekker

Theorem 21 side 551

Anta at $A(x) = \sum_{n=0} a_n x^x$ og $B(x) = \sum_{n=0} b_n x^x$ konvergerer absolutt for $|x| < R$.
La

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

for alle n.
Da konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^x$ absoloutt mot $A(x)B(x)$ for alle x slik $|x| < R$.

Taylor- og Maclaurinrekker

Definisjon side 554

La a være et tall og la f være en funksjon som er uendelig mange ganger deriverbar i punktet a (dvs. $f^n(a)$ eksisterer for alle n).

Da kalles rekken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ for *Taylorrekken* til f om punktet a.

Hvis $a = 0$ kalles rekken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$ for *Maclaurinrekken* til f.

NTNU
Det skapende universitet

Plan for i morgen

Torsdag 14:15–16:00 i R1

- **8.8** Taylor- og maclaurinrekker
- **8.9** Konvergens av Taylorrekker
- **8.10** Binomialrekker

NTNU
Det skapende universitet