NTNU

Det skapende universitet

TMA4100 Matematikk 1 for MTDESIG, MTIØT-PP, MTMART og MTPROD høsten 2010

Toke Meier Carlsen
Institutt for matematiske fag

28. oktober 2010

Fremdriftplan

I går

- **7.7** Uegentlige integraler
- **8.1** Følger

I dag

- **8.1** Følger
- **8.2** Rekker
- **8.3** Integraltesten

NTNU
Det skapende universitet

Uendelige følger

Definisjon side 502

En (uendelig) følge er en uendelig sekvens av tall

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Tallene $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ kalles elementene i følgen.

Merknad

En følge kan også oppfattes som en funksjon definert på de naturlige tallene.

NTNU
Det skapende universitet

Konvergens og divergens

Definisjon side 504

En følge $\{a_n\}$ konvergerer mot L dersom det til enhver $\epsilon > 0$ finnes en N slik at $|a_n - L| < \epsilon$ for alle $n \geq N$. I så fall kalles L for grenseverdien av $\{a_n\}$ og vi skriver

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

En følge som konvergerer mot et tall kalles konvergent. En følge som ikke er konvergent kalles divergent.

NTNU

Det skapende universitet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Example 1 a) side 504

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Bevis

Gitt $\epsilon > 0$. Vi må finne N slik at $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon$ for alle $n \geq N$.

La N være et tall større enn $\frac{1}{\epsilon}$. Da er $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$ for alle $n \geq N$.

NTNU
Det skapende universitet

Divergens mot uendelig

Definisjon side 505

En følge $\{a_n\}$ divergerer mot ∞ dersom det for enhver $M > 0$ finnes en N slik at $a_n > M$ når $n > N$.

Eksempler

- $\{n\}$ divergerer mot ∞.
- $\{-n\}$ divergerer mot $-\infty$.

NTNU
Det skapende universitet

Regneregeler for grenser av følger

Theorem 1 side 506

Anta at $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Da gjelder:

1. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$,
2. $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B$,
3. $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = AB$,
4. $\lim_{n\to\infty} (k a_n) = kA$,
5. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$ hvis $B \neq 0$.

NTNU
Det skapende universitet

Skviseteoremet

Theorem 2 side 506

La $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ og $\{c_n\}$ være følger.
Hvis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ og det finnes en N slik at $a_n \leq b_n \leq c_n$ for alle $n \geq N$, så er $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

Example 4 (a) side 507

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$ fordi $\dfrac{-1}{n} \leq \dfrac{\cos n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$ for alle n og $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{n}$.

Kontinuerlige funksjoner og følger

Theorem 3 side 507

La $\{a_n\}$ være en følge og la $f(x)$ være en funksjon. Hvis $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ og $f(x)$ er kontinuerlig i L, så er $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$.

Eksempel

Da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ og $\cos x$ er kontinuerlig følger det at $\lim_{n\to\infty} \cos(1/n) = cos(0) = 1$.

NTNU
Det skapende universitet

Konvergens av funksjoner og følger

Theorem 4 side 507

La $\{a_n\}$ være en følge. Anta at der finnes en N og en funksjon $f(x)$ slik at $f(x)$ er definert på $[N, \infty)$ og $f(n) = a_n$ for alle $n \geq N$. Hvis $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, da er $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

NTNU
Det skapende universitet

Viktige grenser

Theorem 5 side 509

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$
2. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$
3. $$\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1, \text{ når } x > 0$$
4. $$\lim_{n\to\infty} x^n = 0, \text{ når } |x| < 1$$
5. $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$
6. $$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

NTNU
Det skapende universitet

Begrensede ikke-avtagende følger

Definisjon side 510

En følge $\{a_n\}$ er ikke-avtagende dersom $a_{n+1} \geq a_n$ for alle n.

Definisjon side 510

En følge $\{a_n\}$ er begrenset ovenifra hvis det finnes et tall M slik at $a_n \leq M$ for alle n.
Tallet M kalles en øvre grense eller en øvre skranke til følgen $\{a_n\}$.

NTNU
Det skapende universitet

Konvergens for ikke-avtagende følger

Theorem 6 side 511

1. En ikke-avtakende følge konvergerer hvis og bare hvis den er begrenset ovenifra.
2. Hvis en ikke-avtakende følge konvergerer så konvergerer den mot dens minste øvre skranke.

NTNU
Det skapende universitet

Uendelige rekker

Definisjon side 516

- En uendelig rekke er en uendelig sum av tall

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \dots$$

  a_n kalle rekkens n-te ledd.
- Den n-te delsummen er summen av de n første leddene

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

NTNU
Det skapende universitet

Uendelige rekker

Definisjon side 516

- Hvis $\{S_n\}$ konvergerer mot L, så sier vi at rekken $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerer mot L og skriver

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = L$$

- Hvis rekken $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ikke konvergerer, sier vi at den divergerer.

NTNU
Det skapende universitet

Geometriske rekker

Merknad side 517

- En geometrisk rekke er en rekke på formen

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

- En geometrisk rekke konvergere når $|r| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

- og divergerer når $|r| \geq 1$ og $a \neq 0$.

Kombinasjon av rekker

Theorem 8 side 520

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ så er

1. $\sum_{n=1} (a_n + b_n) = A + B$
2. $\sum_{n=1} (a_n - b_n) = A - B$
3. $\sum_{n=1} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n = kA$

Tilføying og fjerning av ledd

Merknad side 521

Konvergens og divergens av en rekke endres ikke ved

- tilføyelse eller
- fjerning av

et endelig antall ledd (men summen endres).

Reindeksering

Merknad side 521

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h}$

NTNU
Det skapende universitet

n-te-ledds-testen

Theorem 7 side 519

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer så er $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Merknad side 519

Hvis $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ eller ikke eksisterer så divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

NTNU

Det skapende universitet

Konvergens av ikke-negative rekker

Korollary side 523

En rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bestående av ikke-negative ledd er konvergent hvis og bare hvis det finnes en øvre skranke for de partielle summene $\sum_{k=1}^{n} a_k$

(dvs. hvis og bare hvis det finnes et tall M slik at $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq M$ for alle n).

NTNU
Det skapende universitet

Integraltesten

Theorem 9 side 525

La $\{a_n\}$ være en følge med ikke-negative ledd.
Anta at det finnes en N og en kontinuerlig, ikke-negativ, ikke-avtagende kontinuerlig funksjon f definert på intervallet $[N, \infty)$ slik at $f(n) = a_n$ for alle $n \geq N$.

Da er rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent hvis og bare hvis integralet $\int_N^{\infty} f(x)dx$ er konvergent.

Plan for neste uke

I neste uke vikarierer Sigmund Selberg for meg. Planen er at han gjennomgår

- **8.3** Integraltesten
- **8.4** Sammenligningstesten
- **8.5** Forholdstesten og rottesten
- **8.6** Alternerende rekker, absolutt og betinget konvergens
- **8.7** Potensrekker

NTNU
Det skapende universitet