



# NTNU

Det skapende universitet

## **TMA4100 Matematikk 1 for MTDESIG, MTIØT-PP, MTMART og MTPROD høsten 2010**

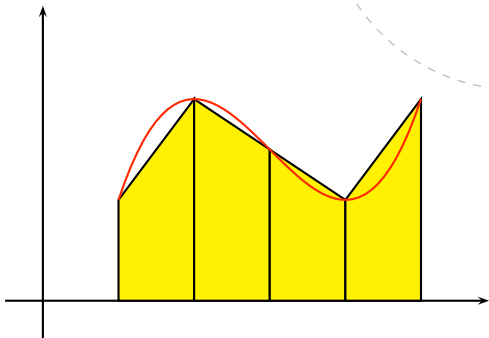
Hans Jacob Rivertz  
Institutt for matematiske fag  
21. oktober 2010

# Nummerisk integrasjon – Trapesmetoden

Trapesmetoden går ut på å tilnærme integralet

$$\int_a^b f(x) dx$$

med  $n$  trapeser.



$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$



**NTNU**

Det skapende universitet

# Døme

## Eksempel

Gitt integralet

$$I = \int_0^1 \sin(e^x) dx.$$

Bruk trapesmetoden med 10 intervall til å finne eit estimat til verdien til integralet. Gi svaret med 4 desimalar.



**NTNU**

Det skapende universitet

Løsning: Steglengden er  $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0,1$ .

La  $f(x) = \sin(e^x)$ . Da gir trapesmetoden

$$\begin{aligned} T_{10} &= \frac{\Delta x}{2} \left( f(0) + 2f(0,1) + 2f(0,2) + 2f(0,3) + 2f(0,4) + 2f(0,5) \right. \\ &\quad \left. + 2f(0,6) + 2f(0,7) + 2f(0,8) + 2f(0,9) + f(1,0) \right) = \\ &= 0,05 \cdot \left( 0,84148 + 2 \cdot 0,89354 + 2 \cdot 0,93959 + 2 \cdot 0,97570 \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot 0,99688 + 2 \cdot 0,99697 + 2 \cdot 0,96858 \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot 0,90349 + 2 \cdot 0,79320 + 2 \cdot 0,63034 + 0,41078 \right) = \underline{\underline{0,8724}} \end{aligned}$$



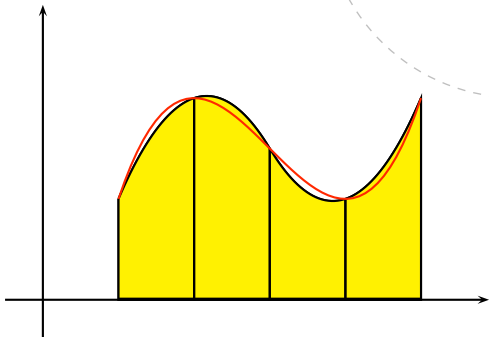
NTNU

Det skapende universitet

# Nummerisk integrasjon – Simpsons Metode

Simpsons metode går ut på å tilnærme  $f(x)$  med  $\frac{n}{2}$  parabler for å tilnærme integralet

$$\int_a^b f(x) dx.$$



$$\int_a^b f(x) dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$y_k = f(x_k)$$



**NTNU**

Det skapende universitet

# Døme

## Eksempel

Gitt integralet

$$I = \int_0^1 \sin(e^x) dx.$$

Bruk Simpsonmetoden med 10 intervall til å finne eit estimat til verdien til integralet. Gi svaret med 4 desimalar.

Løsning: Steglengden er  $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0,1$ .

La  $f(x) = \sin(e^x)$ . Da gir Simpsons metode

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{\Delta x}{3} \left( f(0) + 4f(0,1) + 2f(0,2) + 4f(0,3) + 2f(0,4) + 4f(0,5) \right. \\ &\quad \left. + 2f(0,6) + 4f(0,7) + 2f(0,8) + 4f(0,9) + f(1,0) \right) = \\ &= (0,1/3) \cdot \left( 0,84148 + 4 \cdot 0,89354 + 2 \cdot 0,93959 + 4 \cdot 0,97570 \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot 0,99688 + 4 \cdot 0,99697 + 2 \cdot 0,96858 \right. \\ &\quad \left. + 4 \cdot 0,90349 + 2 \cdot 0,79320 + 4 \cdot 0,63034 + 0,41078 \right) = \underline{\underline{0,8750}} \end{aligned}$$

Den eksakte verdien er lik ca 0,8749571988

# Feilanalyse for trapesmetoden

## Teorem (Feilanalyse Trapez)

Hvis  $f''(x)$  er kontinuert og  $|f''(x)| \geq M$  for alle  $x \in [a, b]$ . Så vil feilen

$$E_T = \int_a^b f(x) dx - T_n$$

tilfredstille

$$|E_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$



**NTNU**

Det skapende universitet



# Feilanalyse for Simpsons metode

## Teorem (Feilanalyse Simpson)

Hvis  $f^{(4)}(x)$  er kontinuerlig og  $|f^{(4)}(x)| \geq M$  for alle  $x \in [a, b]$ . Så vil feilen

$$E_S = \int_a^b f(x) dx - S_n$$

tilfredstille

$$|E_S| \leq \frac{(b-a)^5}{180 n^4}$$



**NTNU**

Det skapende universitet

# Uekte integral type I

## Definisjon

- 1  $f(x)$  kontinuertlig på  $[a, \infty)$ :

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

- 2  $f(x)$  kontinuertlig på  $(-\infty, b]$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

- 3  $f(x)$  kontinuertlig på  $(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$



**NTNU**

Det skapende universitet

# Eksempler Type I

## Eksempel

$$1 \quad \int_1^{\infty} 1/x \, dx$$

$$2 \quad \int_1^{\infty} 1/x^2 \, dx$$

$$3 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

$$4 \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} \, dx$$