



NTNU

Det skapende universitet

TMA4100 Matematikk 1 for MTDESIG, MTIØT-PP, MTMART og MTPROD høsten 2010

Toke Meier Carlsen
Institutt for matematiske fag
14. oktoberr 2010

Fremdriftplan

I går

- **6.7** Moment og tyngdepunkt
- **7.1** Delvis integrasjon

I dag

- **7.2** Trigonometriske integraler
- **7.3** Trigonometrisk substitusjoner



NTNU

Det skapende universitet

For å regne ut et integral på formen

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx$$

hvor k og n er ikke-negative hele tall bruker vi formelen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (Rottmann side 87) til å omskrive integralet til

$$\int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \sin x dx.$$

Deretter bruker vi substitusjonen $u = \cos x$ $du = -\sin x dx$ og får da integralet

$$\int -(1 - u^2)^k u^n du$$

som ikke er vanskelig å regne ut.



NTNU

Det skapende universitet

For å regne ut et integral på formen

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x \, dx$$

hvor m og k er ikke-negative hele tall bruker vi formelen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (Rottmann side 87) til å omskrive integralet til

$$\int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cos x \, dx.$$

Deretter bruker vi substitusjonen $u = \sin x$ $du = \cos x \, dx$ og får da integralet

$$\int u^m (1 - u^2)^k \, du$$

som ikke er vanskelig å regne ut.



NTNU

Det skapende universitet

Merknad side 456

For å regne ut et integral på formen

$$\int \sin^{2k} x \cos^{2l} x \, dx$$

hvor k og l er ikke-negative hele tall bruker vi formlene $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ og $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ (eventuelt flere ganger) til å omskrive integralet til en sum av integraler på formen $\int \cos^{2n+1}(mx) \, dx$.



NTNU

Det skapende universitet

Merknad side 457–458

For å regne ut integraler som inneholder $\sqrt{1 - \cos(mx)}$ eller $\sqrt{1 + \cos(mx)}$ bruker vi formlene $\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|$ og $\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \left| \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right|$.

Merknad side 458

For å regne ut integraler som inneholder $\tan^n x$ og/eller $\sec^m x$ kan det være lurt å bruke formlene $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ og $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$.



NTNU

Det skapende universitet

Eksempel 4, side 356

$$u = \sec x + \tan x, \quad du = \sec x(\sec x + \tan x)$$

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx \\ &= \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C \\ &= \ln |\sec x + \tan x| + C\end{aligned}$$



NTNU

Det skapende universitet

For å regne ut integraler på formen

$$\int \sin(mx) \sin(nx) dx, \int \sin(mx) \cos(nx) dx$$

$$\text{eller } \int \cos(mx) \cos(nx) dx$$

bruger vi formlene

$$\sin(mx) \sin(nx) = \frac{1}{2} [\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)]$$

$$\sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\sin((m-n)x) + \sin((m+n)x)]$$

$$\cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)]$$

(Rottmann side 88).



NTNU

Det skapende universitet

Trigonometrisk substitusjon

Merknad side 461

For å regne ut integraler som inneholder $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, $a^2 - x^2$, $a^2 + x^2$ eller $x^2 - a^2$ kan det være lurt å bruke substitusjonene $x = a \tan \theta$, $x = a \sin \theta$ eller $x = a \sec \theta$.



NTNU

Det skapende universitet

Plan for neste uke

Onsdag 8:15–10:00 i F1

- **7.4** Delbrøkoppløsning og integrasjon av rasjonale funksjoner
- **7.5** Integrasjonstabeller og Computer Algebra Systems
- **7.6** Numerisk integrasjon

Torsdag 14:15–16:00 i R1

- **7.6** Numerisk integrasjon
- **7.7** Uegentlige integraler



NTNU

Det skapende universitet