



NTNU

Det skapende universitet

TMA4100 Matematikk 1 for MTDESIG, MTIØT-PP, MTMART og MTPROD høsten 2010

Toke Meier Carlsen
Institutt for matematiske fag
13. oktoberr 2010

Fremdriftplan

Siste uke

- **6.2** Volum ved sylinderskallmetoden
- **6.3** Lengde av kurver
- **6.4** Overflateareal av omdreiningslegemer
- **6.5** Eksponentiell vekst og separable differensialligninger
- **6.6** Arbeid

I dag

- **6.7** Moment og tyngdepunkt
- **7.1** Delvis integrasjon



NTNU

Det skapende universitet

En stangs balansepunkt

Eksempel

La S være en masseløs stang plasert på x -aksen. Anta at vi plasserer et lodd på 2 kg i punktet $x = -1$, et lodd på 1 kg i punktet $x = 1$ og et lodd på 5 kg i punktet $x = 2$.
Hvor er stangens balansepunkt?



NTNU

Det skapende universitet

Massesenter

Balansepunkt = likevektpunkt = tyngdepunkt = massesenter

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$$



NTNU

Det skapende universitet

Massesenter i 2D

- Systemets masse $M = \sum_{k=1}^n m_k$
- Moment om x -aksen $M_x = \sum_{k=1}^n m_k y_k$
- Moment om y -aksen $M_y = \sum_{k=1}^n m_k x_k$
- Massesentret

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M} \right)$$



NTNU

Det skapende universitet

En plates massesenter

Merknad side 439

La oss betrakte en uendelig tynn plate med kontinuerlig massetetthet som dekker et område A i planen.

- Platens masse lik $M = \int_A dm$.
- Platens moment om x -aksen er lik $M_x = \int_A \tilde{y} dm$.
- Platens moment om y -aksen er lik $M_y = \int_A \tilde{x} dm$.
- Platens massesenter er lik $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M}\right)$.

Hvis δ er massetettheten er $dm = \delta dA$.



NTNU

Det skapende universitet

Eksempel

La oss finne massesentret til en uendelig tynn plate som dekker området avgrenset av kurven $x = 1/\sqrt{y}$, y -aksen og linjene $y = 1$ og $y = 16$ og som i ethvert punkt i dette området har massetetthet $4/\sqrt{4}$.



NTNU

Det skapende universitet

Delvis integrasjon

Merknad side 449

Anta at f og g er kontinuerlige og deriverbare funksjoner og at f' og g' er kontinuerlige.

Da er

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Hvis vi la $u = f(x)$ og $v = g(x)$, så er $du = f'(x)dx$ og $dv = g'(x)dx$. Følgelig er

$$\int u dv = uv - \int v du.$$



NTNU

Det skapende universitet

Delvis integrasjon, bestemte integraler

Merknad side 452

Anta at $a \leq b$, at f og g er kontinuerlige og deriverbare funksjoner definert på $[a, b]$ og anta at f' og g' er kontinuerlige på $[a, b]$.

Da er

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$



NTNU

Det skapende universitet

Plan for i morgen

Torsdag 14:15–16:00 i R1

- **7.2** Trigonometriske integraler
- **7.3** Trigonometrisk substitusjoner



NTNU

Det skapende universitet