



NTNU

Det skapende universitet

TMA4100 Matematikk 1 for MTDESIG, MTIØT-PP, MTMART og MTPROD høsten 2010

Toke Meier Carlsen
Institutt for matematiske fag
7. oktoberr 2010

Fremdriftplan

I går

- **6.2** Volum ved sylinderskallmetoden
- **6.3** Lengde av kurver
- **6.4** Overflateareal av omdreiningslegemer

I dag

- **6.4** Overflateareal av omdreiningslegemer
- **6.5** Eksponentiell vekst og separable differensialligninger
- **6.6** Arbeid



NTNU

Det skapende universitet

Arealet av en rotasjonsflate

Definisjon, side 416

La $a < b$ og la f være en positiv, kontinuerlig funksjon definert på $[a, b]$.

Anta at f er deriverbar og at f' er kontinuerlig i (a, b) .

Da er arealet av flaten som fremkommer når grafen til f roteres om x -aksen lik

$$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$



NTNU

Det skapende universitet

Arealet av en rotasjonsflate

Merknad, side 418

Anta at

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad t \in [a, b]$$

er en parameterfremstilling til en kurve og anta at kurven gjennomløpes nøyaktig én gang når t gjennomløper $[a, b]$.

Anta at f og g er deriverbare i $[a, b]$, at f' og g' er kontinuerlige og at det ikke finnes et $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) = g'(c) = 0$.

Da er arealet av flaten som fremkommer når kurven (x, y) roteres om x -aksen lik

$$\int_a^b 2\pi g(t) \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt.$$



NTNU

Det skapende universitet

Førsteordens differensiallikninger

En *førsteordens differensiallikning* er en differensiallikning som kan skrives på formen

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

der f er en funksjon i to variabler.

En funksjon F er en løsning til differensiallikningen

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

på intervallet I hvis $F'(x) = f(x, F(x))$ for alle $x \in I$.



NTNU

Det skapende universitet

Separable differensiallikninger

Side 422

En førsteordens differensiallikning kalles *separabel* hvis den kan skrives på formen

$$\frac{dy}{dx} = g(x)H(y).$$



NTNU

Det skapende universitet

Løsning av en separabel differensiallikning

- 1 Saml alt med y på den ene side av likhetstegnet og alt med x på den annen side.
- 2 Integrer begge sider (husk konstanten).
- 3 Sett inn initialverdiene og bestem konstanten.
- 4 Bestem y .



NTNU

Det skapende universitet

Eksponeusjål vekst

Løsningen til begynnelsesverdioproblemet

$$\frac{dy}{dt} = ky, \quad y(0) = y_0$$

der k og y_0 er konstanter, er $y(t) = y_0 e^{kt}$.

Hvis $k > 0$ kalles $t_2 = \frac{\ln 2}{k}$ for *fordoblingstiden* og er det unike tidspunktet der $y(t_2) = 2y_0$.

Hvis $k < 0$ kalles $t_1 = \frac{\ln(1/2)}{k}$ for *halveringstiden* og er det unike tidspunktet der $y(t_1) = \frac{1}{2}y_0$.



NTNU

Det skapende universitet

Kraft og arbeid

Definisjon side 431

Det arbeidet som en variabel kraft F utfører over en strekning $[a, b]$ er gitt ved

$$W = \int_a^b F(x) dx.$$



NTNU

Det skapende universitet

Eksempel

For å strekke en fjær fra hviletilstanden til 3 meter brukes 15 J.
Anta at fjæren oppfyller Hooks lov $F = kx$.
Hvor mye ekstra arbeid må brukes for å strekke fjæren 1 meter videre?

Eksempel

Hvor mye arbeid må brukes for å tømme et fullt halvkuleformet vannreservoar med radius 10 meter ved å pumpe vannet til en høyde av 5 meter over reservoarets topp?

Plan for neste uke

Onsdag 8:15–10:00 i R7

- **6.7** Moment og tyngdepunkt
- **7.1** Delvis integrasjon

Torsdag 14:15–16:00 i R1

- **7.2** Trigonometriske integraler
- **7.3** Trigonometrisk substitusjoner



NTNU

Det skapende universitet