NTNU

Det skapende universitet

TMA4100 Matematikk 1 for MTDESIG, MTIØT-PP, MTMART og MTPROD høsten 2010

Toke Meier Carlsen

Institutt for matematiske fag

8. september 2010

Fremdriftplan

Siste uke

- **3.6** Implisitt derivasjon
- **3.7** Derivasjon av inverse funksjoner og logaritmer
- **3.8** Derivasjon av inverse trigonometriske funksjoner
- **3.9** Relaterte vekstrater
- **3.10** Linearisering og differensialer

I dag

- **3.11** Hyperbolske funksjoner
- **4.1** Ekstremverdier

NTNU
Det skapende universitet

Hyperbolske funksjoner

Definisjon, side 221

- $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Definisjon, side 221

- $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- $\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \ x \neq 0$
- $\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$
- $\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \ x \neq 0$

NTNU
Det skapende universitet

Side 82 i Rottmann.

Formler for hyperbolske funksjoner

1. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
2. $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$
3. $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$
4. $\cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x)+1}{2}$
5. $\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x)-1}{2}$
6. $\tanh^2(x) = 1 - \operatorname{sech}^2(x)$
7. $\coth^2(x) = 1 + \operatorname{csch}^2(x)$

Side 82–84 i Rottmann.

NTNU
Det skapende universitet

Deriverte av hyperbolske funksjoner

1. $\frac{d}{dx}(\sinh(x)) = \cosh(x)$
2. $\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \sinh(x)$
3. $\frac{d}{dx}(\tanh(x)) = \operatorname{sech}^2(x)$
4. $\frac{d}{dx}(\coth(x)) = -\operatorname{csch}^2(x)$
5. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}(x)) = -\operatorname{sech}(x)\tanh(x)$
6. $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}(x)) = -\operatorname{csch}(x)\coth(x)$

Side 130 i Rottmann.

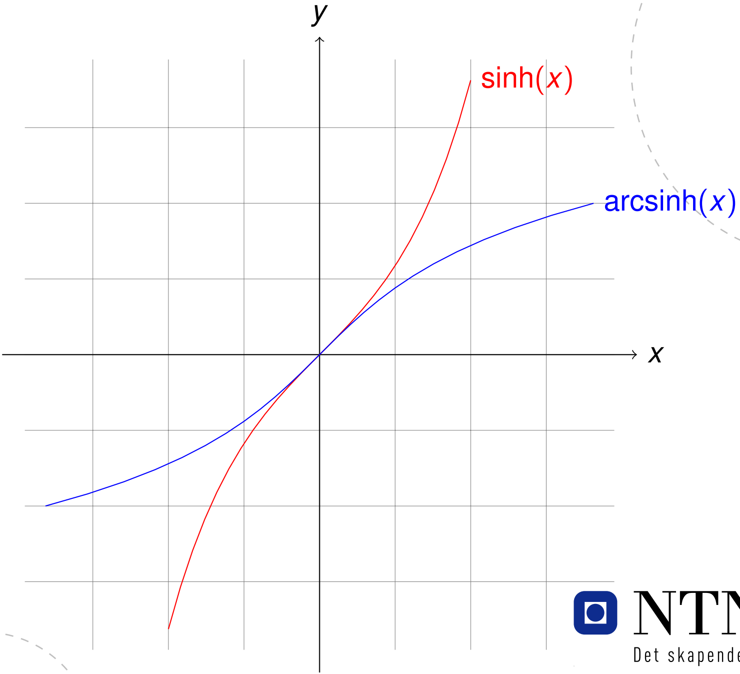
NTNU
Det skapende universitet

Inverse hyperbolske funksjoner

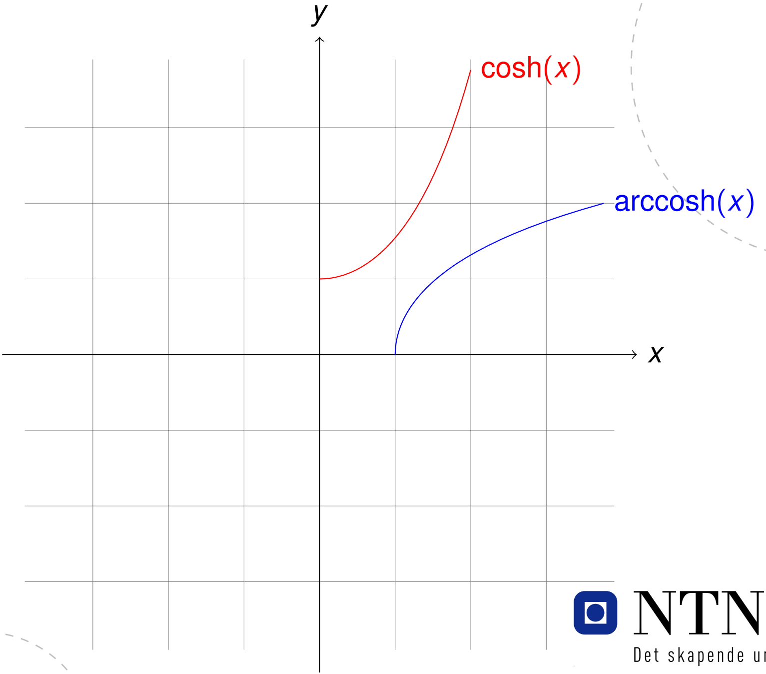
1. $\operatorname{arcsinh}(x) = \sinh^{-1}(x)$ er den inverse til $\sinh(x)$; $D(\operatorname{arcsinh}(x)) = (-\infty, \infty)$.
2. $\operatorname{arccosh}(x) = \cosh^{-1}(x)$ er den inverse til $f(x) = \cosh(x)$, $D(f) = [0, \infty)$; $D(\operatorname{arccosh}(x)) = [1, \infty)$.
3. $\operatorname{arctanh}(x) = \tanh^{-1}(x)$ er den inverse til $\tanh(x)$; $D(\operatorname{arctanh}(x)) = (-1, 1)$.
4. $\operatorname{arccoth}(x) = \coth^{-1}(x)$ er den inverse til $\coth(x)$; $D(\operatorname{arccoth}(x)) = (-\infty, 1-) \cup (1, \infty)$.
5. $\operatorname{arcsech}(x) = \operatorname{sech}^{-1}(x)$ er den inverse til $f(x) = \operatorname{sech}(x)$, $D(f) = [0, \infty)$; $D(\operatorname{arcsech}(x)) = (0, 1]$.
6. $\operatorname{arccsch}(x) = \operatorname{csch}^{-1}(x)$ er den inverse til $\operatorname{csch}(x)$; $D(\operatorname{arccsch}(x)) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Side 89 i Rottmann.

NTNU
Det skapende universitet



NTNU
Det skapende universitet


y
cosh(x)
arccosh(x)
x

Inverse hyperbolske funksjoner

1. $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
2. $\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),\ x \geq 1$
3. $\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ |x| < 1$
4. $\operatorname{arccoth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ |x| > 1$
5. $\operatorname{arcsech}(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right),\ 0 < x \leq 1$
6. $\operatorname{arccsch}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right),\ x \neq 0$

NTNU
Det skapende universitet

Deriverte av inverse hyperbolske funksjoner

1. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsinh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccosh}(x)) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}, \ x > 1$
3. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arctanh}(x)) = \frac{1}{1-x^2}, \ |x| < 1$
4. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccoth}(x)) = \frac{-1}{1-x^2}, \ |x| > 1$
5. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsech}(x)) = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, \ 0 < x < 1$
6. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccsch}(x)) = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}, \ x \neq 0$

Side 130 i Rottmann.

NTNU
Det skapende universitet

Ekstremalverdier av funksjoner

Definisjon, side 237

La f være en funksjon.

- Et punkt $a \in D(f)$ kalles et *maksimumspunkt* for f og $f(a)$ kalles *maksimalverdien* av f dersom $f(a) \geq f(x)$ for alle $x \in D(f)$.
- Et punkt $b \in D(f)$ kalles et *minimumspunkt* for f og $f(b)$ kalles *minimalverdien* av f dersom $f(b) \leq f(x)$ for alle $x \in D(f)$.

NTNU
Det skapende universitet

Ekstremalverdisetningen

Theorem 1, side 238

Anta at f er en kontinuerlig funksjon og $D(f)$ er et lukket, begrenset intervall (dvs. $D(f) = [a, b]$).
Da har f et maksimumpunkt og et minimumspunkt i intervallet $[a, b]$.

NTNU
Det skapende universitet

Lokale ekstramalpunkter

Definisjon, side 239

La f være en funksjon.

- Et punkt $a \in D(f)$ kalles et *lokalt (eller relativt) maksimumspunkt* for f dersom det finnes en $\delta > 0$ slik at $f(a) \geq f(x)$ for alle $x \in D(f) \cap (c - \delta, c + \delta)$.
- Et punkt $b \in D(f)$ kalles et *lokalt (eller relativt) minimumspunkt* for f dersom det finnes en $\delta > 0$ slik at $f(b) \leq f(x)$ for alle $x \in D(f) \cap (c - \delta, c + \delta)$.
- Med et fellesnavn kaller vi lokale maksimum- og minimumspunkter for *lokale ekstremalpunkter*.

NTNU
Det skapende universitet

Førstederivertetesten for lokale ekstrema

Theorem 2, side 240

La f være en funksjon. Anta at c er et indre punkt i $D(f)$, f er deriverbar i c og at c er et lokalt ekstremalpunkt for f.
Da er $f'(c) = 0$.

Merknad, side 241

Anta at f er en funksjon og at $D(f) = [a, b]$.
Hvis c er et lokalt ekstremalpunkt for f, da er enten:

1. c er et av endepunktene a og b.
2. $f'(c) = 0$.
3. f er ikke deriverbar i c.

NTNU
Det skapende universitet

Kritiske punkter

Definisjon, side 241

La f være en funksjon. Et indre punkt c i $D(f)$ kalles et *kritisk punkt* for f dersom f ikke er deriverbar i c eller $f'(c) = 0$.

Merknad, side 241

Når vi skal finne absolutte ekstrema av en kontinuerlig funksjon f på et lukket begrenset intervall gjør vi følgende:

1. Finn f sin verdi i alle kritiske punkter og endepunktene.
2. Plukk den minste og største verdien.

NTNU
Det skapende universitet

Plan for i morgen

Torsdag 14:15–16:00 i R1

- **4.2** Middelverditeoremet
- **4.3** Monotone funksjoner og førstederiverttesten
- **4.4** Krumning og annenderiverttesten, kurveskissering

NTNU
Det skapende universitet