NTNU

Det skapende universitet

TMA4100 Matematikk 1 for MTDESIG, MTIØT-PP, MTMART og MTPROD høsten 2010

Toke Meier Carlsen
Institutt for matematiske fag

2. september 2010

Fremdriftplan

I går

- **3.6** Implisitt derivasjon
- **3.7** Derivasjon av inverse funksjoner og logaritmer

I dag

- **3.8** Derivasjon av inverse trigonometriske funksjoner
- **3.9** Relaterte vekstrater
- **3.10** Linearisering og differensialer

NTNU
Det skapende universitet

Deriverte av inverse funksjoner

Teorem 4, side 185

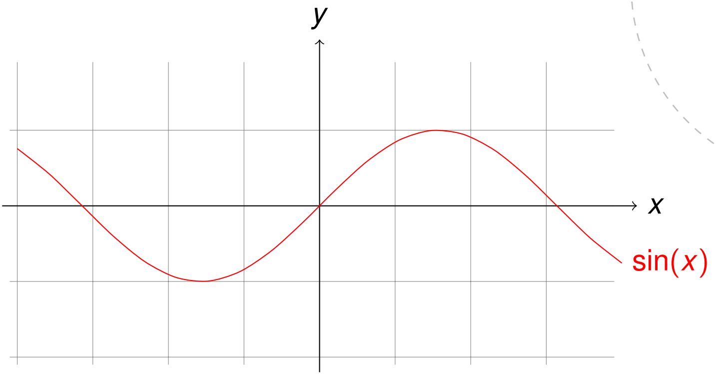
Anta at f er deriverbar, $D(f)$ er et intervall og $f'(x) \neq 0$ for alle $x \in D(f)$. Da er f en-til-en, f^{-1} er deriverbar og

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

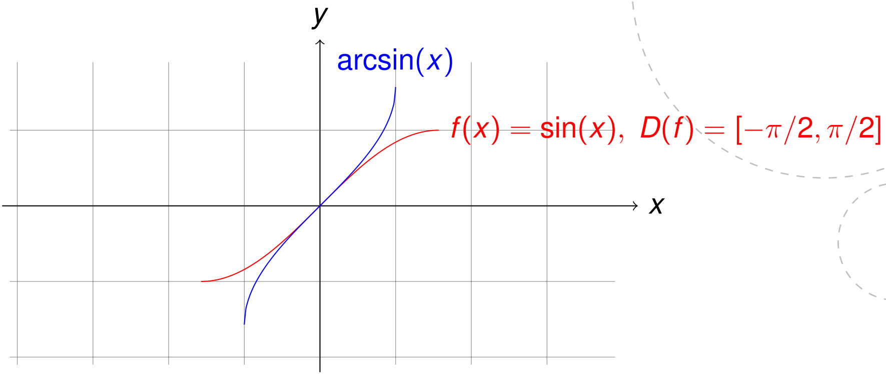
for alle $y \in D(f^{-1}) = V(f)$.

NTNU

Det skapende universitet



NTNU
Det skapende universitet



y
arcsin(x)
f(x) = sin(x), D(f) = [−π/2, π/2]
x

Deriverte av inverse funksjoner

Teorem 4, side 185

Anta at f er deriverbar, $D(f)$ er et intervall og $f'(x) \neq 0$ for alle $x \in D(f)$. Da er f en-til-en, f^{-1} er deriverbar og

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

for alle $y \in D(f^{-1}) = V(f)$.

NTNU
Det skapende universitet

Deriverte af inverse trigonometriske funksjoner

arcsin(x)

1. $\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$ er den inverse til funksjonen $f(x) = \sin(x)$, $D(f) = [-\pi/2, \pi/2]$.
2. $D(\arcsin(x)) = V(f) = [-1, 1]$.
3. $\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

NTNU
Det skapende universitet

Deriverte af inverse trigonometriske funksjoner

$\arccos(x)$

1. $\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$ er den inverse til funksjonen $f(x) = \cos(x)$, $D(f) = [0, \pi]$.
2. $D(\arccos(x)) = V(f) = [-1, 1]$.
3. $\frac{d}{dx}(\arccos(x)) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

Deriverte af inverse trigonometriske funksjoner

arctan(x)

1. $\arctan(x) = \tan^{-1}(x)$ er den inverse til funksjonen $f(x) = \tan(x)$, $D(f) = (-\pi/2, \pi/2)$.
2. $D(\arctan(x)) = V(f) = (-\infty, \infty)$.
3. $\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$ for alle x.

NTNU
Det skapende universitet

Deriverte af inverse trigonometriske funksjoner

arccot(x)

1. $\text{arccot}(x) = \cot^{-1}(x)$ er den inverse til funksjonen $f(x) = \cot(x)$, $D(f) = (0, \pi)$.
2. $D(\text{arccot}(x)) = V(f) = (-\infty, \infty)$.
3. $\frac{d}{dx}(\text{arccot}(x)) = \frac{-1}{1+x^2}$ for alle x.

Deriverte af inverse trigonometriske funksjoner

arcsec(x)

1. $\operatorname{arcsec}(x) = \sec^{-1}(x)$ er den inverse til funksjonen $f(x) = \sec(x)$, $D(f) = [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$.
2. $D(\operatorname{arcsec}(x)) = V(f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.
3. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec}(x)) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$.

NTNU
Det skapende universitet

Deriverte af inverse trigonometriske funksjoner

$\text{arccsc}(x)$

1. $\text{arccsc}(x) = \csc^{-1}(x)$ er den inverse til funksjonen $f(x) = \csc(x)$, $D(f) = [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$.
2. $D(\text{arccsc}(x)) = V(f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.
3. $\frac{d}{dx}(\text{arccsc}(x)) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$.

Formelene til $\arccos(x)$, $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$ og $\text{arccot}(x)$ står på side 89 i Rottmann.

NTNU
Det skapende universitet

Relaterte vekstrater

Eksempel

En bakteriekultur danner en sirkel hvis diameter vokser med 2 cm per time.
Hvor rask vokser arealet av sirkelen når diameteren er 10 cm?

Relaterte vekstrater

Eksempel (oppgave 3.9.14)

To fly flyver i 11 km's høyde langs rette linjer som skjærer hverandre i en rett vinkel.
Fly A nærmer seg skjæringspunktet med en fart av 700 km/t og fly B nærmer seg skjæringspunktet med en fart av 600 km/t.
Hvor rask endre avstanden mellom flyvene seg når fly A er 4 km fra skjæringspunktet og fly B er 3 km fra skjæringspunktet?

NTNU
Det skapende universitet

Linearisering

Definisjon, side 210

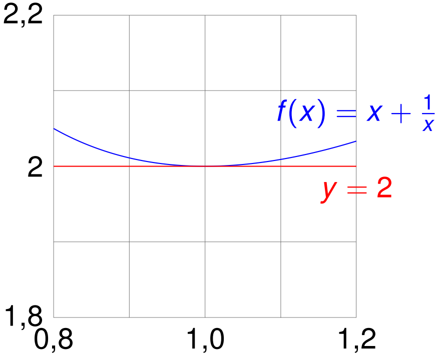
(Standard) lineariseringen til en deriverbar funksjon f i punktet $x = a$ er gitt ved funksjonen som har graf lik tangenten til f i $x = a$.

Merknad

Formel for lineariseringen til f i $x = a$ er gitt ved

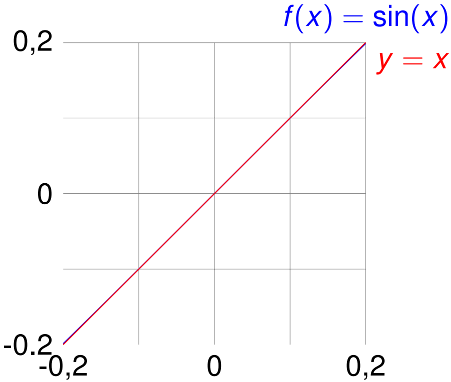
$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Det skapende universitet



x	$f(x)$	$L(x)$
0.80000	2.05000	2
0.90000	2.01111	2
1.00000	2.00000	2
1.10000	2.00909	2
1.20000	2.03333	2

NTNU
Det skapende universitet



x	$f(x)$	$L(x)$
-0.20000	-0.19867	-0.20000
-0.10000	-0.09983	-0.10000
0.00000	0.00000	0.00000
0.10000	0.09983	0.10000
0.20000	0.19867	0.20000

Tilnærming til endring av y-verdi

Definisjon, side 213

La $y = f(x)$ være en deriverbar funksjon og la $a \in D(f)$. Vi innfører to nye variable størrelser dx og dy. *Differensialet* dy til funksjonen $y = f(x)$ i punktet $x = a$ er gitt ved

$$dy = f'(a)dx.$$

(dy er en funksjon av dx).
Vi sier a dx er en uavhengig størrelse, men dy avhenger av dx.

NTNU
Det skapende universitet

Eksempel (Oppgave 3.10.53)

La oss estimere mengden av materiale der skal brukes til å lave et hult sylindrisk rør med høyde 30 cm, radius 6 cm og skalltykkelse 0,5 cm.

Eksempel (Oppgave 3.10.58)

Anta at en bedrifts fortjenste ved salg av n gjenstande er $F(n) = 200e^{\frac{-n}{400}}n$.
Estimer endringen og den prosentvise endringen i fortjenesten når salget endre seg fra $n = 145$ til $n = 150$.

Hvor stor er feilen i differensialet *dy*?

- Gitt en funksjon f som er deriverbar i a.
- La x endres fra a til $a + \Delta x$.
- $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ er den eksakte verdi av endringen av $y = f(x)$.
- $dy = f'(a)\Delta x$ er differensialet til $y = f(x)$ i $x = a$.
- Feilen i dy er $\Delta y - dy$.

Teorem, side 216

La f være deriverbar i a. Feilen i dy er lik $\varepsilon\Delta x$ der ε er en størrelse som er avhengig av Δx og som går mot 0 når Δx går mot 0.

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon\Delta x.$$

NTNU
Det skapende universitet

Bevis for kjerneregelen

Teorem 3, side 166

Anta at f er deriverbar i x_0 og g er deriverbar i $f(x_0)$. Da er den sammensatte funksjonen $g \circ f$ deriverbar i x_0 og

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Teorem, side 216

La f være deriverbar i a. Feilen i dy er lik $\varepsilon \Delta x$ der ε er en størrelse som er avhengig av Δx og som går mot 0 når Δx går mot 0.

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon \Delta x.$$

Plan for neste uke

Onsdag 8:15–10:00 i R7

- **3.11** Hyperbolske funksjoner
- **4.1** Ekstremverdier

Torsdag 14:15–16:00 i R1

- **4.2** Middelverditeoremet
- **4.3** Monotone funksjoner og førstederiverttesten
- **4.4** Krumning og annenderiverttesten, kurveskissering

NTNU
Det skapende universitet