Fremdriftplan

I går

- **2.3** Den formelle definisjonen av grenseverdi
- **2.4** Ensidige grenser og grenser i uendelig
- Presentasjon av bokens e-læringsystem

I dag

- **2.5** Uendelige grenser og vertikale asymptoter
- **2.6** Kontinuitet

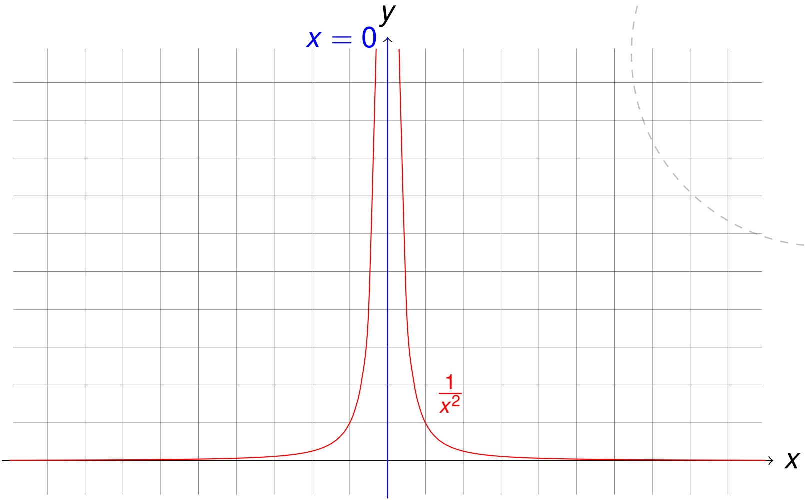
NTNU
Det skapende universitet

Endelige grenser

I går definert vi hva det betyr at

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$
- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

og vi definerte *horisontale* og *skrå asymptoter*.



$x = 0$ er en vertikal asymptote for grafen til $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Uendelige grenser

Definisjon, side 98

Anta at det finnes $h > 0$ slik at f er definert på intervallene $(x_0 - h, x_0)$ og $(x_0, x_0 + h)$.
Vi sier at $f(x)$ *går mot uendelig* for x gående mot x_0, og skriver $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, dersom følgende gjelder:
For ethvert tall B eksisterer en $\delta > 0$ slik at $f(x) > B$ når $0 < |x - x_0| < \delta$.

- På tilsvarende måte defineres $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$,
- og $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$.

NTNU
Det skapende universitet

Regneregler for uendelige grenser

- Teorem 1–5 i kap. 2.1 gjelder ikke for uendelige grenser (vi kan ikke regne med uendelig).
- Vi har imidlertid følgende resultat:

Merknad

Anta at det finnes $h > 0$ slik at f og g er definert på intervallene $(x_0 - h, x_0)$ og $(x_0, x_0 + h)$ og at $f(x) \leq g(x)$ for alle $x \in (x_0 - h, x_0) \cup (x_0, x_0 + h)$.
Anta også at $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.
Da er $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$.

NTNU
Det skapende universitet

Regneregler for uendelige grenser

Merknad

Hvis $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ og k er en konstant, da gjelder:

$$\lim_{x \to x_0} kf(x) = \begin{cases} \infty & \text{hvis } k > 0, \\ 0 & \text{hvis } k = 0, \\ -\infty & \text{hvis } k < 0. \end{cases}$$

NTNU
Det skapende universitet

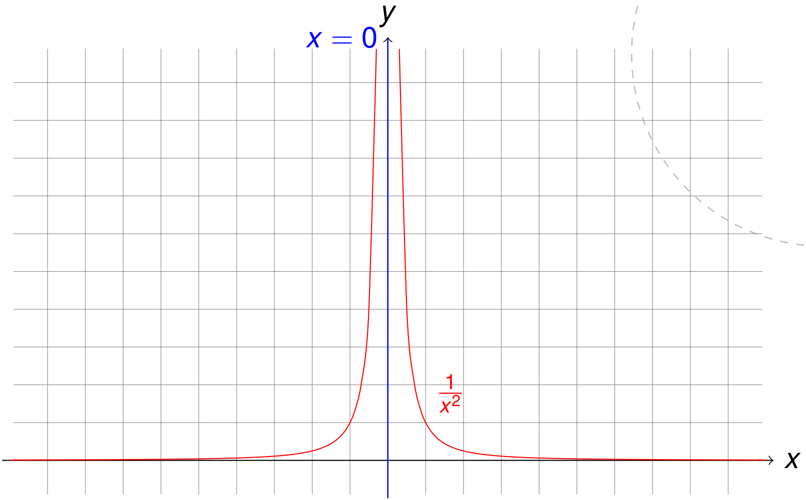
Vertikale asymptoter

Definisjon, side 99

En linje $x = a$ er en *vertikal asymptote* for grafen til en funksjon f hvis enten

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

NTNU
Det skapende universitet



$x = 0$ er en vertikal asymptote for grafen til $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Kontinuitet i et punkt

Definisjon, side 105

En funksjon f er *kontinuerlig i et indre punkt* $x_0 \in D(f)$ dersom

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

En funksjon f er *kontinuerlig i et venstre endepunkt punkt* $x_0 \in D(f)$ dersom

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

En funksjon f er *kontinuerlig i et høyre endepunkt punkt* $x_0 \in D(f)$ dersom

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

NTNU
Det skapende universitet

Mer om kontinuitet

- En funksjon f er *diskontinuerlig* i et punkt x_0 dersom f ikke er kontinuerlig i x_0.
- En funksjon er *høyre-* eller *venstrekontinuerlige i et indre punkt* dersom $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ eller $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, henholdsvis.
- En funksjon er *kontinuerlig på et intervall I* dersom funksjonen er definert på hele I og er kontinuerlig i alle punkter i I.
- En funksjon er *kontinuerlig* dersom den er kontinuerlig i alle punktene i definisjonsmengden.

En vigtig grense

Theorem 7, side 88

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

NTNU
Det skapende universitet

Egenskaper ved kontinuerlige funksjoner

Teorem 9, side 107

Anta at f og g er kontinuerlige i c.
Da er følgende funksjoner også kontinuerlige i c:

- $f + g$
- fg
- kf
- f/g, hvis $g(c) \neq 0$
- f^p, hvis den er definert på et åpent intervall rundt c.

NTNU
Det skapende universitet

Sammensetningen av kontinuerlige funksjoner

Teorem 10, side 108

Anta at f er kontinuerlig i c og at g er kontinuerlig i $f(c)$. Da er $g \circ f$ kontinuerlig i c

Teorem 11, side 109

Anta at g er kontinuerlig i b og at $\lim_{x \to c} f(x) = b$. Da er $\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(b)$.

NTNU
Det skapende universitet

Mellomverdisetningen

Teorem 12, side 111

Anta at f er kontinuerlig på intervallet $[a, b]$. Hvis y er en verdi i intervallet mellom $f(a)$ og $f(b)$, da finnes en c i intervallet $[a, b]$ slik at $f(c) = y$.

Plan for resten av uken

Onsdag 8:15–10:00 i R2

- **2.7-3.3** Derivasjon

Torsdag 8:15–10:00 i R1

- Studieteknikk
- **3.4–3.5** Derivasjon av trigonometriske funksjoner, kjerneregelen, parametriske kurver

NTNU
Det skapende universitet