Fremdriftplan

I går

1.1 Funksjoner og deres grafer

1.2 Operasjoner av funksjoner

I dag

1.3 Trigonometriske funksjoner

1.4 Eksponentialfunksjoner

1.5 Omvendte funksjoner, logaritmiske funksjoner, inverse trigonometriske funksjoner

1.6 Digital verktøy

2.1 Endringsrater og tangenter

2.2 Grenser

NTNU
Det skapende universitet

Trigonometriske funksjoner

Radianer

Lad θ være en sentralvinkel i en sirkel med radius r og s være buelengden som vinkelen utspenner.
Da er vinkelen θ i *radianer* gitt ved forholdet $\theta = s/r$.
Vi bruker (i dette kurset) alltid radianer som vinkelmål.

NTNU
Det skapende universitet

Trigonometriske funksjoner

La θ være en vinkel. Betrakt en rettvinklet trekant der vinkelen θ inngår. La

- a være lengden til den motstående kateten
- b være lengden til den hosliggende kateten
- c være lengden til hypotenusen.

Definisjon

Da definerer vi

- $\sin\theta = \frac{a}{c}$ $\qquad \cos\theta = \frac{b}{c}$ $\qquad \tan\theta = \frac{a}{b}$
- $\csc\theta = \frac{c}{a}$ $\qquad \sec\theta = \frac{c}{b}$ $\qquad \cot\theta = \frac{b}{a}$

NTNU
Det skapende universitet

Trigonometriske identiteter

Noen viktige trigonometriske identiteter

- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

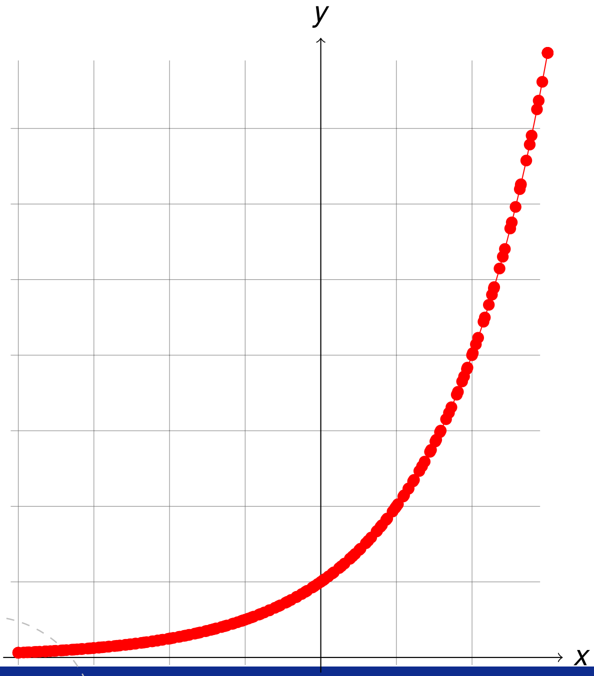
Flere trigonometriske identiteter finnes i boken og i Rottman side 85–88.

NTNU
Det skapende universitet

Eksponentialfunksjoner

- En *eksponentialfunksjon* er en funktion som kan skrives på formen $f(x) = ka^x$, der k og a er konstanter og $a > 0$.
- *Den naturlige eksponentialfunksjonen* er gitt ved $\exp(x) = e^x$, der $e = \exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,712828$.
- Vi definerer $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$.
  Dermed er f, gitt ved $f(x) = a^x$, definert for alle rasjonale verdier av x. Vi kan (ved hjelp av grenseverdier) definere f også for irrasjonale x slik at f blir kontinuerlig overalt.

NTNU
Det skapende universitet



$f(x) = 2^x$

x	$f(x)$
1	2
2	4
3	8
0	1
-1	1/2
-2	1/4
-3	1/8
-4	1/16

Regneregler for eksponentialfunksjoner

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^x b^x = (ab)^x$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

Se Rottman side 7–8 og 80–81.

NTNU
Det skapende universitet

Invertible funksjoner

Definisjon, side 37

En funksjon f kalles *en-til-en* (eller *injektiv*) dersom $f(x) \neq f(y)$ når $x \neq y$.

Horisontal linje-testen

En funksjon er injektiv hvis og bare hvis enhver horisontal linje høyst skjærer grafen til funksjonen en gang.

Dersom en funksjon er voksende eller avtagende, så er den en-til-en.

NTNU
Det skapende universitet

Inverse funksjoner

Definisjon, side 38

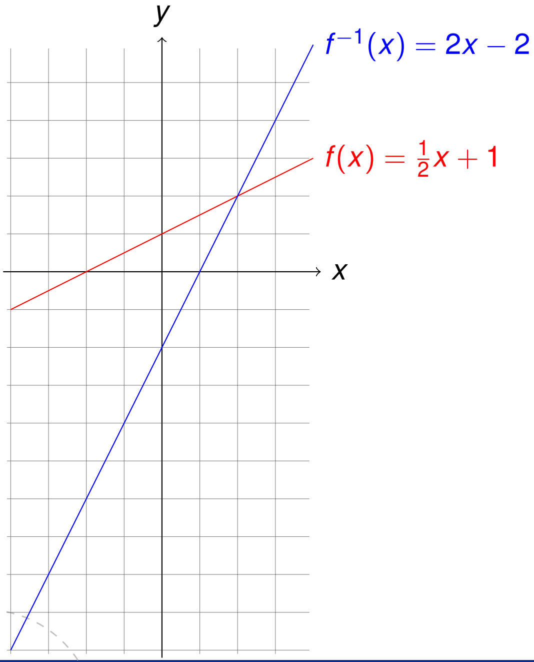
La f være en en-til-en funksjon. Den *inverse funksjonen* (eller *den omvendte funksjonen*) f^{-1} er da definert ved at $f^{-1}(y) = x$ hvis $f(x) = y$.

- $D(f^{-1}) = V(f)$ og $V(f^{-1}) = D(f)$
- $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ for alle $x \in D(f)$
- $(f \circ f^{-1})(y) = y$ for alle $y \in D(f^{-1})$

Merknad

Dersom f ikke er en-til-en, eksisterer heller ikke noen invers funksjon for f (horisontal linje-testen blir til vertikal linje-testen hos den inverse).

NTNU
Det skapende universitet



y
x
$f^{-1}(x) = 2x - 2$
$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

Grafen til inverse funksjoner

Merknad

Grafen til f^{-1} er speilingen til grafen til f om linjen $y = x$.

Logaritmefunksjoner

Definisjon, side 40

Hvis $a > 0$, $a \neq 1$ definerer vi *logaritmefunksjonen med grunntall a* til å være den inverse funksjonen til eksponentialfunksjonen $f(x) = a^x$ og betegner den med $\log_a$.

- $D(\log_a) = (0, \infty)$ og $V(\log_a) = (-\infty, \infty)$.
- $a^{\log_a(x)} = x$ for $x > 0$ og $\log_a(a^x) = x$ for alle x.
- *Den naturlige logaritmefunksjonen* er logaritmefunksjonen med grunntall e og betegnes med ln.
- Logaritmefunksjonen med grunntall 10 betegnes med log eller lg.

NTNU
Det skapende universitet

Regneregler for logaritmefunksjoner

- $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln a^x = x \ln a$

NTNU
Det skapende universitet

Inverse trigonometriske funksjoner

De 6 trigonometriske funksjonene sin, cos, tan, csc, sec og cot er ikke en-til-en (da de er periodiske) og har derfor ingen inverse.

Definisjon, side 45

$\arcsin x$ (eller $\sin^{-1} x$) er den inverse funksjonen til funksjonen $f(x) = \sin x,\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

På tilsvarende måte defineres $\arccos x$, $\arctan x$ og $\operatorname{arccot} x$ (se boken side 45 og 194).
Inverse trigonometriske funksjoner kalles også *syklometriske funksjoner* (se Rottman side 88–89).

NTNU
Det skapende universitet

Regneregler for inverse trigonometriske funksjoner

Regneregler

- $\sin(\arcsin x) = x$ for $x \in [-1, 1]$
- $\arcsin(\sin x) = x$ for $x \in [-\pi/2, \pi/2]$
- $\cos(\arccos x) = x$ for $x \in [-1, 1]$
- $\arccos(\cos x) = x$ for $x \in [0, \pi]$
- $\tan(\arctan x) = x$ for $x \in (-\infty, \infty)$
- $\arctan(\tan x) = x$ for $x \in (-\pi/2, \pi/2)$
- $\cot(\operatorname{arccot} x) = x$ for $x \in (-\infty, \infty)$
- $\operatorname{arccot}(\cot x) = x$ for $x \in (0, \pi)$

NTNU
Det skapende universitet

Digitale verktøy

Digitale verktøyer kan være nyttige til (bl.a.) å illustrere matematiske problemstillinger og ekspermitere med matematikk.

Matematiske programvare

Følgende er eksempler på matematiske programvare

- Maple
- Matlab
- Mathematica

NTNU har købt lisenser for Maple og Matlab, se `http://www.ntnu.no/adm/it/orakel/programvare`.

NTNU
Det skapende universitet

Grensebegrepet

Uformell definisjon

La f være definert på et åpent intervall som inneholder x_0, bortsett muligens fra x_0 selv.
Vi sier at et tall L er *grenseverdien* til $f(x)$ for x gående mot x_0, og skriver $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, dersom $f(x)$ nærmer seg L når x nærmer seg x_0.

Når eksisterer grensen ikke?

- Funksjonen vokser og oppnår vilkårlig store verdier nær x_0.
- Funksjonen gjør et hopp i x_0.
- Funksjonen oscillerer for mye nær x_0.

NTNU
Det skapende universitet

Regneregler for grenseverdier

Teorem 1, side 65

Anta at $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ og $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$.
Da gjelder at

1. $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = L + M$,
2. $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = LM$,
3. $\lim_{x\to x_0}(kf(x)) = kL$,
4. $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$ hvis $M \neq 0$,
5. $\lim_{x\to x_0}(f(x)^p) = L^p$ hvis L^p eksisterer.

NTNU
Det skapende universitet

Grenser av polynomsfunksjoner og rasjonale funksjoner

Teorem 2, side 66

Hvis $P(x) = a_n x^n + a_{n_1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$, da er $\lim_{x \to x_0} P(x) = a_n x_0^n + a_{n_1} x_0^{n-1} + \ldots a_1 x_0 + a_0 = P(x_0)$.

Teorem 3, side 67

Hvis P og Q er polynomsfunksjoner og $Q(x_0) \neq 0$, da er $\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

NTNU
Det skapende universitet

Skviseteoremet (The Sandwich Theorem)

Teorem 4, side 69

Anta $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ for alle x i et åpent område som innenolder x_0, bortsett fra muligens i x_0. Anta også at

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L.$$

Da er $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

NTNU
Det skapende universitet

Teorem 5, side 70

Anta $f(x) \leq g(x)$ for alle x i et åpent område som innenolder x_0, bortsett fra muligens i x_0. Anta også at grenseverdiene til f og g eksisterer når $x_0 \to x$. Da er

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

NTNU
Det skapende universitet

Plan for neste uke

Mandag 08:15–10:00 i S5

E-læringssytemet + 2.3–2.5

Tirsdag 10:15–11:00 i S7

2.6

Onsdag 8:15–10:00 i R2

2.7+3.1–3.3

Torsdag 8:15–10:00 i R1

Studieteknikk + 3.4–3.5

NTNU
Det skapende universitet