Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Teknostartøving

Fasit

$\boxed{1}$ (a) $f(x) = x^3 - 1$; $D_f = V_f = (-\infty, \infty)$; har invers $f^{-1}(x) = (x+1)^{1/3}$; $D_{f^{-1}} = V_f$, $V_{f^{-1}} = D_f$

(b) $f(x) = \frac{1}{1+x}$; $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$, $V_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; har invers $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 1$; $D_{f^{-1}} = V_f$, $V_{f^{-1}} = D_f$

(c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $D_f = (-\infty, \infty)$, $V_f = (0, 1]$; har ingen invers

(d) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \geq 0$; $D_f = [0, \infty)$, $V_f = (0, 1]$; $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$; $D_{f^{-1}} = V_f$, $V_{f^{-1}} = D_f$

(e) $f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1, \quad x \leq -1$; $D_f = (-\infty, -1]$, $V_f = [-1, \infty)$; $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+1} - 1$; $D_{f^{-1}} = V_f$, $V_{f^{-1}} = D_f$

$\boxed{2}$ $f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$ og $g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$; g er ikke invers til f.

$\boxed{3}$ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (1 - \sqrt{x})^2 = 1 - 2\sqrt{x} + x$ og $(g \circ f)(x) = 1 - \sqrt{x^2} = 1 - |x|$; $D_{f \circ g} = [0, \infty)$, $V_{f \circ g} = [0, \infty)$; $D_{g \circ f} = (-\infty, \infty)$, $V_{g \circ f} = (-\infty, 1]$

$\boxed{4}$ Riktig utfylt tabell:

$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
$x - 5$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-5}$
$x + 1$	$x^2 - 1$	$(x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x$
x^4	$\sqrt{x-3}$	$\sqrt{x^4 - 3}$
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{x}{x-(x-1)} = x$
$\frac{1}{x-1}$	$1 + \frac{1}{x}$	x
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x
x^2	$\sqrt{x}$	$\lvert x \rvert$

$\boxed{5}$ (b) omtrent 60 m/s

$\boxed{6}$ (a) Vi gjetter $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, som er riktig.

(b) Basert på tilsvarende tallmateriale ville man kanskje gjette at grenseverdien igjen er 1, men dette er feil: Grenseverdien er $-\infty$. Vi må ta x nærmere null for å se dette (prøv med $x = 0{,}0001$ osv.).

$\boxed{7}$ (a) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$

(b) $y - 3 = \frac{1}{2}(x-3)$

$\boxed{8}$ (a) sant; (b) usant; (c) usant; (d) sant; (e) sant

$\boxed{9}$ $\frac{8}{4} = 2$

$\boxed{10}$ Ingen kontinuerlig utvidelse er mulig til $x = 1$ eller $x = -1$

$\boxed{11}$ Skviseloven (sandwich-teoremet) gir $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x} = 0$

$\boxed{12}$ $b = -\frac{1}{2}$

$\boxed{13}$ f er ikke kontinuerlig på $[-1, 3]$. Diskontinuiteter i $x = 1/2$ og $x = 1$.

$\boxed{14}$ $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right) = 1$

$\boxed{15}$ (a) $f'(x) = \frac{12-4x^2}{(x^2+3)^2}$.

(b) Stigningstall $m = f'(1) = \frac{1}{2}$ gir ligningen $y - 1 = \frac{1}{2}(x-1)$

(c) Stigningstallet m' oppfyller $mm' = -1$, så $m' = -\frac{1}{m} = -2$, og ligningen er $y - 1 = -2(x-1)$

$\boxed{16}$ To tangentlinjer: $y = -2 \pm 2\sqrt{2}x$

$\boxed{17}$ (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5}\left(1 - \dfrac{x}{5}\right)^{-4}$

(b) $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 3x^2\right)e^{2\sqrt{x}+x^3}$

$\boxed{18}$ Hastigheten til en partikkel som beveger seg langs s-aksen er gitt ved $v = t^2 - 4t + 3$ for $t \geq 0$, der t er tiden.

(a) $v = (t-2)^2 - 1 = 0$ i $t = 1$ og 3, og da er $a = \frac{dv}{dt}$ lik hhv. -2 og 2

(b) Partikkelen beveger seg forover ($v > 0$) når $0 \leq t < 1$ og når $t > 3$; bakover ($v < 0$) når $1 < t < 3$

(c) Hastigheten er økende ($a > 0$) når $t > 2$; avtagende ($a < 0$) når $0 \leq t < 2$.

$\boxed{19}$ Den deriverte er $\frac{2f(2)f'(2)+2g(2)g'(2)}{2\sqrt{f^2(2)+g^2(2)}} = \frac{38}{10}$

$\boxed{20}$ $y - 1 = \sqrt{2}(x - \sqrt{2})$

$\boxed{21}$ $a = -3$, $b = 2$, $c = 1$.

$\boxed{22}$ Ja, det er sant. Hint: Skjæringssetningen.

$\boxed{23}$ Hint: Skjæringssetningen.