TMA4100 Matematikk 1
h 2010

Teknostartøving

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Denne oppgavesamlingen brukes i de fire øvingene vi har under Teknostart. Husk at øvingene er frivillige. Det er ingen innlevering (og dermed ingen retting). Du kan følge ditt eget tempo og regne så mange (eller få) av oppgavene som du ønsker. Hvis du vil ha flere oppgaver, henviser vi til læreboka.

1 For hver funksjon f under, besvar følgende:

- Hva er verdimengden? NB! Hvis ingen definisjonsmengde er uttrykkelig oppgitt, er det (som vanlig) underforstått at definisjonsmengden er den størst mulige.
- Skisser grafen.
- Har f en invers f^{-1}?
- Hvis svaret på forrige spørsmål var ja, finn uttrykket for $f^{-1}(x)$, samt definisjons- og verdimengden til f^{-1}.

a) $f(x) = x^3 - 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \geq 0$

e) $f(x) = x^2 + 2x, \quad x \leq -1$

2 Sett $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$. Regn ut $f(g(x))$ og $g(f(x))$. For hvilke x er disse uttrykkene definert? Er g den inverse til f?

3 Husk at gitt funksjoner f og g, så er sammensetningen $f \circ g$ definert ved $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Hvis $f(x) = x^2$ og $g(x) = 1 - \sqrt{x}$, finn uttrykkene for $f \circ g$ og $g \circ f$, samt definisjons- og verdimengden for begge to.

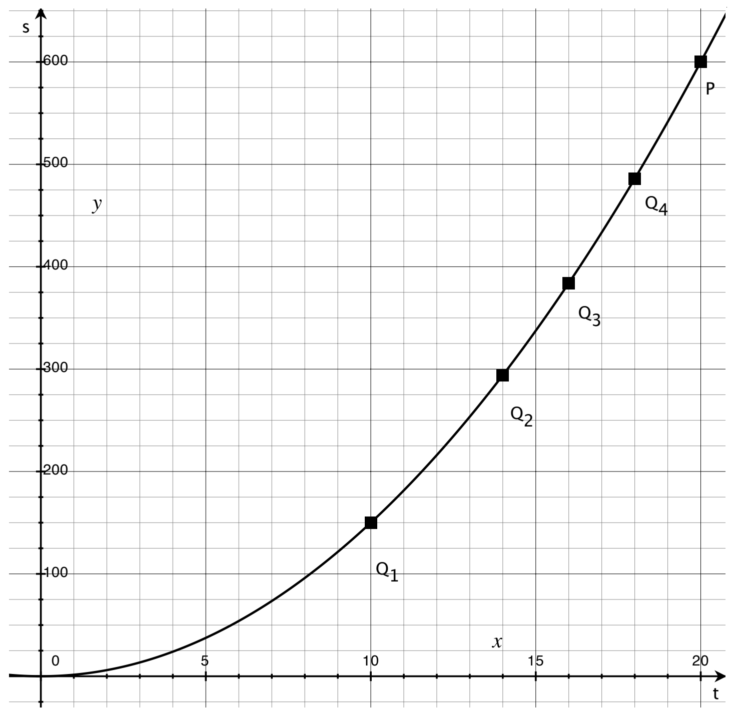
4 Fyll inn de tomme rutene i tabellen:

$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
$x-5$	$\sqrt{x}$	
$x+1$	x^2-1	
	$\sqrt{x-3}$	$\sqrt{x^4-3}$
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	
	$1+\frac{1}{x}$	x
$\frac{1}{x}$		x
	$\sqrt{x}$	$\lvert x \rvert$

5 Figuren under viser tid/distanse-grafen til en bil som ved $t = 0$ er i ro, og som så akselererer. Her er t målt i sekunder og s i meter.

a) Bruk grafen til å estimere stigningstallet til sekantene Q_1P, Q_2P, Q_3P og Q_4P.

b) Omtrent hvilken fart (i m/s) har bilen ved tiden $t = 20$ sekunder?



6 **a)** Sett $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Regn ut $f(0{,}1)$, $f(0{,}01)$ og $f(0{,}001)$, dvs. fyll inn de tomme rutene i tabellen:

x	$f(x)$
0,1	
0,01	
0,001	

Bruk også gjerne kalkulator eller datamaskin til å plotte grafen.

Ut fra tabellen (og evt. grafen), hva tror du om grenseverdien $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$?

b) Gjenta forrige punkt for $f(x) = \frac{\sin x - 10^{-2}x^{0{,}999}}{x}$.

7 La $f(x) = \sqrt{3x}$.

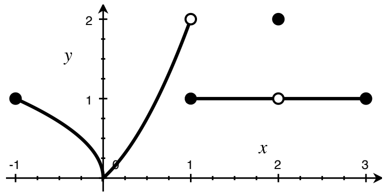
a) Regn ut grenseverdien (gitt $x > 0$)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)} - \sqrt{3x}}{h}$$

ved å multiplisere teller og nevner med $f(x+h) + f(x) = \sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x}$ og forenkle.

b) Finn ligningen for tangenten til grafen til f i punktet $P(3,3)$.

8 La f være funksjonen med graf:



For hvert av følgende utsagn, avgjør om det er sant eller usant:

a) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

b) $\lim_{x\to 2} f(x)$ eksisterer ikke

c) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

d) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ eksisterer ikke

e) f er kontinuerlig i $x = 3$

9 Finn grenseverdien $\lim_{x\to\infty} \dfrac{8x^5 + x^2}{4x^5 + 3x^4 + 10x + 2}$

10 Tegn grafen til $f(x) = \dfrac{x(x^2-1)}{|x^2-1|}$. Er det mulig å utvide f til å bli kontinuerlig i $x = 1$ eller $x = -1$?

11 Bruk kalkulator eller datamaskin til å plotte grafene til $-x^2$, x^2 og $x^2 \sin(1/x)$ i samme figur. Ut fra figuren gjetter vi at

$$-x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$$

for alle $x \neq 0$, noe som faktisk er sant, og ganske enkelt å bevise (prøv å gjøre dette!).

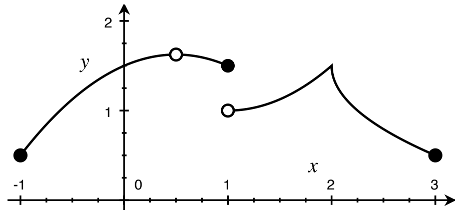
Hva kan du ut fra denne ulikheten konkludere om $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x}$?

12 For hvilken verdi av b er

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ bx^2, & x \ge -2 \end{cases}$$

kontinuerlig for alle x?

13 Er f med graf som under kontinuerlig på intervallet $[-1,3]$? Hvis ikke, hvor er diskontinuitetspunktene?



14 Finn grenseverdien

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$$

15 La $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+3}$.

a) Regn ut $f'(x)$.

b) Finn ligningen for tangenten til grafen til f i punktet $(1,1)$.

c) Finn ligningen for den rette linjen gjennom $(1,1)$ som står vinkelrett på tangenten.

16 Har parabelen $y=x^2$ noen tangentlinjer som går gjennom punktet $(0,-2)$? I så fall: Finn dem.

17 Skriv de følgende funksjoner på formen $y=f(u)$ med $u=g(x)$. Finn så den deriverte dy/dx som funksjon av x.

a) $y=\left(1-\dfrac{x}{5}\right)^{-3}$

b) $y=e^{2\sqrt{x}+x^3}$

18 Hastigheten til en partikkel som beveger seg langs s-aksen er gitt ved $v=t^2-4t+3$ for $t\geq 0$, der t er tiden.

a) Finn partikkelens akselerasjon ved de tidspunktene da hastigheten er null.

b) Når beveger partikkelen seg forover? Bakover?

c) Når er hastigheten økende? Avtagende?

19 Anta at f, g og deres deriverte tar følgende verdier i $x=2$: $f(2)=4$, $g(2)=3$, $f'(2)=1$, $g'(2)=5$. Finn den deriverte dy/dx av $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ i $x=2$.

20 En parametrisert kurve er gitt ved $x=\sqrt{t+1}$ og $y=\sqrt{t}$ for $t\geq 0$. Finn tangentlinjen til kurven i punktet $(x,y)=(\sqrt{2},1)$.

21 Bestem a, b og c slik at kurvene $y=x^2+ax+b$ og $y=cx-x^2$ har en felles tangentlinje gjennom punktet $(1,0)$.

22 Er det sant at hvis vi strekker en gummistrikk slik at en ende trekkes til venstre og den andre til høyre, så er det et punkt på strikken som vil ende opp i samme posisjon som det hadde i utgangspunktet? Begrunn svaret.

23 Anta at f er kontinuerlig på intervallet $[0,1]$ og at $0\leq f(x)\leq 1$ for alle $0\leq x\leq 1$. Vis at det finnes et tall c i $[0,1]$ slik at $f(c)=c$ (en slik c kalles et *fikspunkt* for f).