

# NOTAT til forelesningen 30.11.

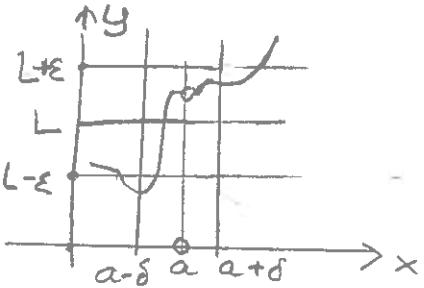
## GRUNNLEGGENDE TEORI

1) Hva betyr  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ?

Det betyr at vi kan få funksjonsverdien  $f(x)$  til  $a^o$  ligge tilsvarende nær  $L$  ved  $a^o$  velge  $x$  tilstrekkelig nær  $a$ . Med  $\varepsilon$  og  $\delta$  får vi følgende presise definisjon på:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L :$$

$\varepsilon > 0$  gitt (uansett hvor liten). Da finnes  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  slik at  $|f(x) - L| < \varepsilon$  når  $0 < |x - a| < \delta$ .



Oppgave 7 (august 2008).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} = 1$$

Beweis  $\varepsilon > 0$  gitt. Vi skal finne  $\delta = \delta(\varepsilon)$  slik at (\*)  $0 < |x - 0| = |x| < \delta \Rightarrow |\sqrt{1+x} - 1| < \varepsilon$ .

Vi observerer at  $\delta \leq 1$ , og videre at

$$|\sqrt{1+x} - 1| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} &\Updownarrow \\ (\sqrt{1+x} + 1) &|\sqrt{1+x} - 1| < \varepsilon(\sqrt{1+x} + 1) \end{aligned}$$

$$|x| < \varepsilon(\sqrt{1+x} + 1)$$

$|x| < \delta = \min(1, \varepsilon)$  impliserer da  $|x| < \varepsilon(\sqrt{1+x} + 1)$  og altså  $|\sqrt{1+x} - 1| < \varepsilon$  som vi ønsket i flg (\*).

2. kvaadratsetn.

Kommentar Det var brukt av konjugatsetningen som gjorde regnearbeidet så lett. Mulig den som stod fasiten regnet mer "slavisk":

$x > 0$ : Ønsker

$$\sqrt{1+x} - 1 < \varepsilon$$

$$\sqrt{1+x} < 1 + \varepsilon$$

$$1+x < 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$$

Altså kan vi velge  $x < \min(2\varepsilon, \varepsilon^2)$

$x < 0$ : Ønsker

$$1 - \sqrt{1-|x|} < \varepsilon \quad (|x| \leq 1 \text{ for mening})$$

$$\sqrt{1-|x|} > 1 - \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon \leq 1$$

$$1 - |x| > 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$|x| < 2\varepsilon - \varepsilon^2 = \varepsilon(2 - \varepsilon)$$

Siden  $\varepsilon \leq 1$  vil  $|x| < \varepsilon$  fungere.

Konklusjon: Gitt  $0 < \varepsilon < 1$ . Da vil, skile fasit sier,  $\delta = \varepsilon^2$  passe:

$$|x| < \delta = \varepsilon^2 \Rightarrow |\sqrt{1+x} - 1| < \varepsilon.$$

## 2) Definisjon av kontinuitet

f kontinuerlig i  $x = a$  betyr

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

(Hvordan blir  $\varepsilon - \delta$  definisjonen her?)

f kontinuerlig på intervallet I dersom f er kontinuerlig i alle  $a \in I$ .

### 3) Tre viktige, "dype" setninger

Skjæringssetningen Gitt  $f$  kontinuerlig på  $[a, b]$  og slike at  $f(a)$  og  $f(b)$  har motsatt fortegn. Da har  $f(x) = 0$  minst en løsning i  $(a, b)$

Kommentar Dette resultatet som virker så oppslagt, bygger på komplettheten av de reelle tall. (Komplettheten omtales gjerne i skolen som at den reelle talllinja er uten "hull".) Setningen er ikke sann om vi holder oss til rasjonale tall. Eksempel som viser dette

$$f(x) = x^2 - 2, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad x \text{ rasjonalt tall}, \\ f(0) = -2, \quad f(2) = 2, \quad \text{men } f(x) \neq 0. \quad (\sqrt{2} \text{ er et irrasjonalt tall.})$$

### Ekstremalverdisetningen

En kontinuerlig funksjon på et lukket, begrenset intervall  $[a, b]$  oppnår både maksimum og minimum.

Eksempel Ved derivasjon og fortegnsdrøfting ser vi at  $f(x) = 6x - x^2$ ,  $0 \leq x \leq 2$  har et maksimumspunkt i  $x = \sqrt{2}$  med maksimalverdi  $4\sqrt{2}$ . Hadde vi bare arbeidet med rasjonale tall, ville det ikke vært mulig å oppnå verdien  $4\sqrt{2}$  men vi kunne kommet så nærmest den vi hadde ønsket, ved å velge rasjonale  $x$ -verdier tilstrekkelig nær  $\sqrt{2}$ .

## Sekantsetningen (Mean Value Theorem)

Gitt en kontinuerlig funksjon  $f$

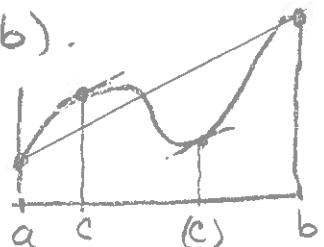
på  $[a, b]$ , deriverbar i  $(a, b)$ .

Da fins et punkt  $c \in (a, b)$

slik at

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$$\Leftrightarrow f(b) = f(a) + f'(c)(b - a).$$



Oppgave: Vis at  $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$  alle  $x, y$ .

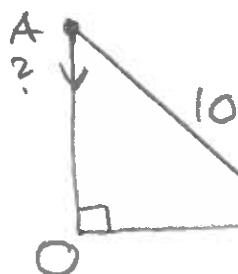
Sekantsetningen ligger til grunn for kurvedrafting (tegn på derivert, vekst av funksjon) om vi vil føre noe mer enn et heuristisk argument for dette! Setningen generaliseres til Taylors formel med restetidel på Lagranges form.

Derivasjon brukes til mer enn kurvedrafting:

## RELATERTE VEKSTRATER

Type I) Ser på gammel eksamensoppgave for „Pythagorasversjonen“

Toppen av ein 10 meter lang stolpe  $AB$  støttar seg mot ein vertikal vegg. Stolpen sitt nedste punkt  $B$  rører seg bort frå det nedste punktet av veggen med ein konstant hastighet på  $1/3$  meter/sekund slik at det øvste punktet  $A$  rører seg loddrett nedover langs veggjen. Kor fort rører punkt  $A$  seg når dette punktet er 6 meter over bakken?



$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} \text{ (m/sek)} \text{ allut}$$

$$(1) x(t)^2 + y(t)^2 = 10^2 \quad (\text{alle } t)$$

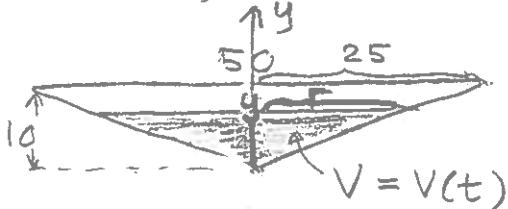
$$(2) \cancel{x(t)x'(t)} + \cancel{2y(t)y'(t)} = 0 \quad (\text{allut})$$

$$t = t_0 \Rightarrow y(t_0) = 6 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x(t_0) = 8$$

$$\text{Innsatt i (2) for } t = t_0: 8 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot y'(t_0) = 0; y'(t_0) = -\frac{4}{9} \text{ (m/sek)}$$

-5-

Type II) er representert ved bl.a. Oppg 7a des 2009:



$$\frac{dV}{dt} = -2 \text{ (m/min)} \text{ alle } t$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{5}{2}y\right)^2 y = \frac{25}{12} \pi y^3$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{10}{25}$$

(allelt)

Vi skal finne  $\frac{dy}{dt}$  når  $y = 8$ . Har

$$-2 = \frac{dV}{dt} = \frac{25}{12} \pi \cdot 3y^2 \cdot \frac{dy}{dt} \text{ alle } t,$$

og ved tidspunktet  $t_0$  da  $y(t_0) = 8$

$$-2 = \frac{25}{12} \pi \cdot 3 \cdot 8^2 \frac{dy}{dt}(t_0)$$

Altså er  $\frac{dy}{dt}(t_0) = -\frac{1}{200\pi} \text{ (m/min)}$ .

Vannstanden synker med  $\frac{1}{200\pi} \text{ m/min}$  i det øyeblikket vannstanden er 8 meter.

## L'HOPITAL

" $\frac{0}{0}$ " "∞" Andre ubestemte uttrykk omstørkes!

### Eksempel

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ "∞"} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp[\frac{1}{x} \ln(1+2x)] = e^2$$

## FUNDAMENTAL SETNINGEN

→ Del 1: følge,  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$

$$\left( \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx \frac{f(x)h}{h} \right)$$

Del 2  $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$  der  $G$  antiderivert til  $f$ .

