Velkommen til eksamenskurs i matematikk 1

Haakon C. Bakka

Institutt for matematiske fag

4.-5. desember 2010

Program

I dag og i morgen skal vi holde på fra 10-16 med en pause fra 13-14. Vi skal gjennom:

- Introduksjon
- Kontekst
- Oppsummering av pensum (med eksamensoppgaver)
- Induksjon
- Spørretime

Det blir tatt videoopptak.
Generelle spørsmål?
Merk: 'Slide' ikke det samme som 'viktig'

Historie

Newton og Leibnitz

De som fant opp differensialregning. Calculus.

Zeno's paradoks (Akilles og skilpadden)

Hvis skilpadden starter 100 meter foran Akilles, og Akilles løper 100 ganger så fort som skilpadden, da vil aldri Akilles ta igjen skilpadden; for når Akilles har løpt 100 meter vil skilpadden ha kommet 1 meter til, og når Akilles har løpt den meteren vil skilpadden være 1 cm foran. Slik vil alltid skilpadden ligge foran Akilles.

Funksjoner

Maskin

En funksjon er en maskin som tar inn en type ting og spytter ut en annen (eller samme) type ting, ved hjelp av et sett med regler for hva den skal gjøre.

Eksempel

$f(x) = x^2$

er en maskin som tar inn reelle tall ($\mathbb{R}$) og spytter ut reelle positive tall ($\mathbb{R}^+$), ved hjelp av regelen:

'ta tallet du fikk inn og gang det med seg selv'.

Funksjoner del 2

Navn og Plassholder

Når vi skriver $f(x) = \ln(x) + \sin(x) + e^2$ så er f navnet på funksjonen, og x en plassholder. Hvis vi vil kalle funksjonen vår θ så skriver vi $\theta(x) = \ln(x) + \sin(x) + e^2$. Plassholderen gir en regel for hva vi skal gjøre hvis vi vil vite hva funksjonen vår er i et punkt.

Eksempler

$\theta(1) = \ln(1) + \sin(1) + e^2$
$\theta(\pi/4) = \ln(\pi/4) + \sin(\pi/4) + e^2$
$\theta(t) = \ln(t) + \sin(t) + e^2$
$\theta(t + y^2) = \ln(t + y^2) + \sin(t + y^2) + e^2$

Funksjoner del 3

Grafer

En graf er ikke en funksjon, men en representasjon av funksjonen som er svært nyttig.
Hva er forsjellen på grafen til en funksjon og grafen til en kurve?

Funksjoner del 4

Sammensetning

La $f(x) = 3x^2 + 1$ og $g(x) = \tan(x) + 2$ da vil:
$f(g) = 3g^2 + 1$
$f(g(x)) = 3(g(x))^2 + 1 = 3(\tan(x) + 2)^2 + 1$, som tilsvarer gjør først g så f. (Kjerneregel ved derivasjon.)

Invers funksjon

La $f(x) = x^3 + 2$, hva betyr inversen av f? Skrives $f^{-1}(x)$. Det er den funksjonen som sammensatt med f blir identiteten, i.e. $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x =$ 'den funksjonen som ikke gjør noe med x'. La oss finne denne (ved å bruke 'navn' og 'plassholder' riktig) og så finne den deriverte. Hvordan ser grafen ut?

http://fooplot.com/index.php?q0=x*x*x+2, x, (x-2)
(incomplete)

Grenseverdi

Grenseverdi

- Når x går mot x_0 så går $f(x)$ mot L
- Du kan få $f(x)$ så nærme L du vil ved å sørge for at x er nærme x_0
- For alle feilmarginer ϵ finnes presisjon δ slik at $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Eksempel

Finn og bevis ved $\epsilon - \delta$ hva $\lim_{x \to 2} \frac{(x^2-4)(x+2)}{x-2}$ er.

Eksamenssamling: Oppgave 2b (sal)

L'Hopitals regel

Et 'bevis' for L'H:
La $x \to a$ (vanligvis a=0) slik at
$f(x) \to 0$ og $g(x) \to 0$.
Hvis vi i tillegg lar $h \to 0$ kan vi skrive:
$f(x+h) \to 0$ og $g(x+h) \to 0$, så da vil

$$\lim_{x \to a, h \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a, h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)}$$

$$= \lim_{x \to a, h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Legg merke til at vi er helt avhengig av at $f(x)$ **og** $g(x)$ går mot 0, og at vi deriverer oppe og nede hver for seg. Dette fungerer også med $\frac{\infty}{\infty}$.

Derivasjon

http://en.wikipedia.org/wiki/Derivative
(finn gif)

Definisjon

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Delt forskrift

Beware! Her må man vanligvis bruke definisjonen!
Eksempler: $x \sin(1/x)$ og $x^2 sin(1/x)$.

Derivasjon 2

Nullpunkter 1

Hvis en funksjon er deriverbar er den også kontinuerlig. Hvis den er kontinuerlig så er den sammenhengende, det vil si at:
Hvis $f(x)$ er definert på intervallet $[a, b]$ så må alle verdier mellom $f(a)$ og $f(b)$ treffes av forskjellige x-er i dette intervallet.

Nullpunkter 2

Hvis en funksjon skal kunne ha 2 nullpunkter (og den er kontinuerlig deriverbar) så må den deriverte være 0 et sted i mellom.

Eksempel

$x^3 + 3x^2 - 1$ se (http://fooplot.com/)
Oppgave: Hvor mange nullpunkt har $f(x) = e^x - 2x^2$? Gjett!

Anvendelser av derivasjon

Implisitt derivasjon

Eksamenssamling oppgave 4.

Optimalisering

Eksamenssamling oppgave 6.
Wolframalpha: find min of $((L-x)/4)^2 + x^2/2 * sqrt(3)/18$.

Riemannintegrasjon

Areal

Hvis Arealet under grafen kan regnes ut med regler vi kjenner fra før (sirkel, rektangel, trekant e.l.) så er det bra.

Vanskelige areal

Vi deler arealet opp i infinitesimale rektangler (som vi har en formel for arealet til, nemlig bredde dx ganger høyde $f(x)$) og så summerer uendelig mange slike.
$A =$ 'Sum over infinitesimale rektangler fra x=a til x=b'
$= \int_a^b f(x)dx$.
(Her er $\int$ en fancy S for 'Sum'.)

Riemannintegrasjon 2

Når vi skal gjøre ideen fra i sted presis blir det Riemannintegrasjon, hvor vi deler opp intervallet i forskjellige (eller like) tykkelser Δx_i og antall biter er n, og den største tykkelsen er $||P||$. Slik at:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{||P|| \to 0, n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i$$

eller, hvis vi deler i n like store biter, alle med tykkelse $\Delta x = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\Delta x) \Delta x$$

Eksempel: Eksamenssamling oppgave 21
Eksempel: Anvendelse: Oppgave 22 (legg merke til at vi tenker Riemannsum-aktig)

Fundamentalteorem

Teorem

Antiderivasjon = Integrasjon
(Hvis du deriverer den integrerte så får du funksjonen tilbake)

Anvendelse

Vi har lov til å bruke omvendte derivasjonsregler når vi integrerer!

'Bevis' (fundamentalteoremetCalculus.pdf).

Eksempel

Eksamenssamling oppgave 2a

Integrasjonsteknikker

Need to know

- Substitusjon (Skriv opp forskjellige kjerner før du begynner å prøve dem)
- Delbrøkoppspaltning
- Delvis integrasjon
- Trigonometrisk substitusjon (?)
- Taylor-integrasjon !

Eksempler dukker opp på andre oppgaver

ROTTMANN

Bruk Rottmann til å finne integralene / Sjekke svaret!
Med riktig substitusjon kan Rottmann løse nesten alt!

Eksempel: Eksamenssamling oppgave 25 (Delbrøk og Rottmann)

Følger og rekker

Følge

En følge er en 'kø' av tall som f.eks:
(1, 2, 3, 4, 5, 6, . . .) [skrives noen ganger uten parantesene]
(1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, . . .)
(1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, . . .)
Den første divergerer mot ∞, de andre to konvergerer mot 0.

Rekke

En rekke er en sum av tall, som f.eks:

$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

En rekke konvergerer når det er meningsfylt å gi summen et tall (ikke ∞). De to første rekkene divergerer mens den siste konvergerer mot 1. Hvorfor?

Konvergenstester

Need to know

- n'te ledds testen (for at rekken skal konvergere må den underliggende følgen konvergere mot 0, leddene må bli mindre og mindre)
- Direkte sammenlikning (sammenlikner ofte med $\sum \frac{1}{n}$ og $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ som såvidt divergerer)
- Grensesammenlikning
- Integraltesten (funker alltid hvis du klarer å integrere det tilsvarende integralet (gitt monoton funksjon))
- Ratiotesten
- Rottesten
- Leibnitz test for alternerende rekker (eneste testen du kan bruke for betinget konvergens; en alternerende rekke vil enten divergere ved n'te ledds testen, eller konvergere ved Leibnitz)

Taylorrekke

Rekke med variabel x inni

Den første ideen vi må forstå:
Vi putter en x inni rekken og sier at så lenge summen konvergerer er dette en funksjon av x, f.eks:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{3^n}$$

Hvor er funksjonen definert?

Taylor

Tar utgangspunkt i Rottmann (s 110) fordi dere har den på eksamen. (Dårlig notasjon.) La $x = 0$:

$$f(h) = f(0) + \frac{h}{1!}f'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(0) + \cdots$$

Taylorrekke 2

Eksempel: Finn taylor om $x = 1$ for $f(x) = \frac{1}{x}$
Merk at vi kan flytte spørsmålet til rundt $x = 0$:
Finn taylorrekka til $g(x) = f(x+1)$ rundt $x = 0$, hvor $g(x) = \frac{1}{x+1}$.
Må først finne ut at $g^{(k)}(x) = (-1)^k k!(x+1)^{-k-1}$.
Så blir polynomet (Rottmann)

$$p(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} h^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{k!} h^k = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k h^k$$

Bakka's trylleformular for induksjon

1. Skriv om utsagnet til 'noe'=0 (pass på at det ikke er noen k der, og at tellevariabelen er n)
2. Vis grunnsteget (vanligvis $n = 0$, eller $n = 1$)
3. Skriv ned I.A. (Induksjons-Antagelsen; utsagnet for $N = k$)
4. Vis utsagnet for $N = k + 1$ ved (skriv opp venstresiden):
    1. Triks deg frem til å bruke I.A.
    2. Sett ting utenfor parentes, bruk felles brøkstrek
    3. Få 0 ved mer triksing
5. Finishing touch ('Altså er utsagnet vist ved induksjon for ...)