

## Variant av substitusjon:

$$\int f(g(x)) dx = ?$$

• Prøver  $u = g(x)$

$$du = g'(x) dx$$

• Hvis  $g'(x) = H(g(x))$

så er  $du = H(u) dx$   $(dx = \frac{du}{H(u)})$

og

$$\boxed{\int f(g(x)) dx = \int f(u) \frac{du}{H(u)}}$$

(I detalj:

$$\begin{aligned} \int f(g(x)) dx &= \int f(g(x)) \frac{g'(x)}{g'(x)} dx \\ &= \int f(g(x)) \frac{g'(x) dx}{H(g(x))} \end{aligned}$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \int f(u) \frac{du}{H(u)}$$

(fra standard  
substitusjonsformel )

Eks.

$$\int \frac{dx}{1+e^x}$$

$u = e^x$   
 $du = u'(x) dx = e^x dx = u dx$   
 $\Rightarrow \frac{du}{u} = dx$

$$= \int \frac{1}{1+u} \cdot \frac{du}{u}$$
$$= \int \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} \right) du$$
$$= \int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{1+u} du \quad v = 1+u \\ dv = du$$
$$= \ln|u| - \int \frac{dv}{v}$$
$$= \ln|u| - \ln|v| + C$$
$$= \ln|u| - \ln|1+u| + C$$
$$= \ln(e^x) - \ln(1+e^x) + C$$
$$= \underline{\underline{x - \ln(1+e^x) + C}}$$

## Substitution i bestemt integral

$$(*) \int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

Grensene:

- $x=a \rightarrow u=g(a)$
- $x=b \rightarrow u=g(b)$

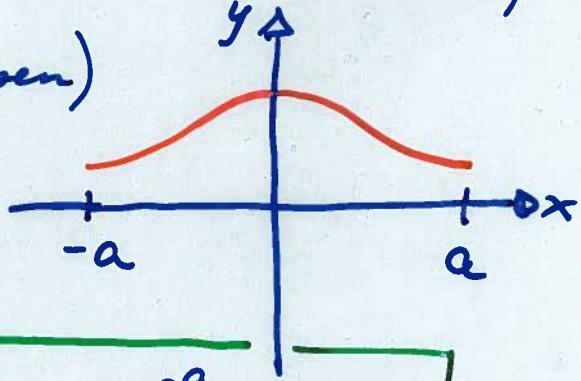
(Bewis:  $F' = f$  gir  $[F(g(x))]' = f(g(x))g'(x)$   
og derfor

$$\begin{aligned} \text{V.S. } (*) &= [F(g(x))] \Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= [F(u)] \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &= \text{H.S. } (*) \end{aligned}$$

## Bestemte integraler av symmetriske funksjoner

Anta  $f$  kont. på  $[-a, a]$

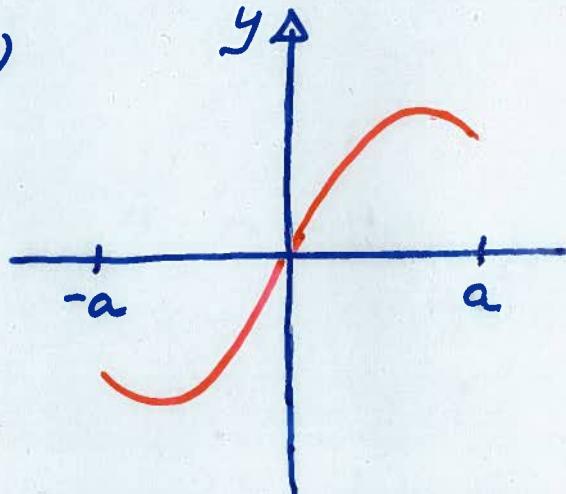
- (a)  $f$  like funksjon (dvs.  $f(-x) = f(x)$ )  
(symmetri om  $y$ -aksen)



Da er

$$\boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx}$$

- (b)  $f$  odde funksjon (dvs.  $f(-x) = -f(x)$ )  
(symmetri om origo)



Da er

$$\boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = 0}$$

## Arealer mellom kurver

Anta  $f, g$  kont. på  $[a, b]$

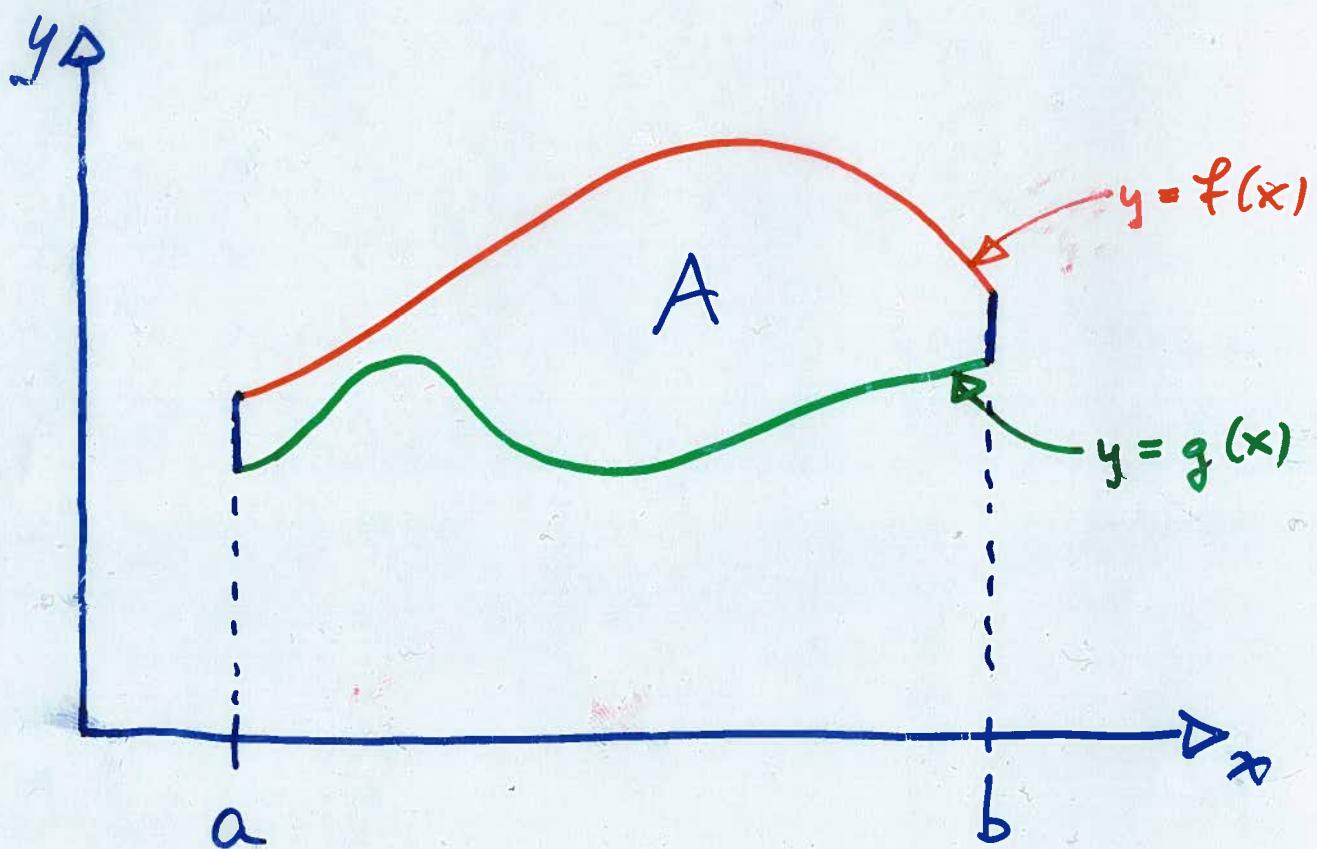
og  $f(x) \geq g(x)$  på  $[a, b]$ .

Arealet mellom kurvene

$y = g(x)$  og  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ ,

er gitt ved

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



## 5.7 $\ln$ som bestemt integral

$$(*) \quad \boxed{\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt} \quad (x > 0)$$

Kan ta (\*) som def. av  $\ln x$ , og  
def.

$$\exp(x) = \ln^{-1}(x) \quad (\text{invers})$$

dvs.

$$\boxed{y = \ln x \iff x = \exp(y)}$$

Fra (\*) får vi:

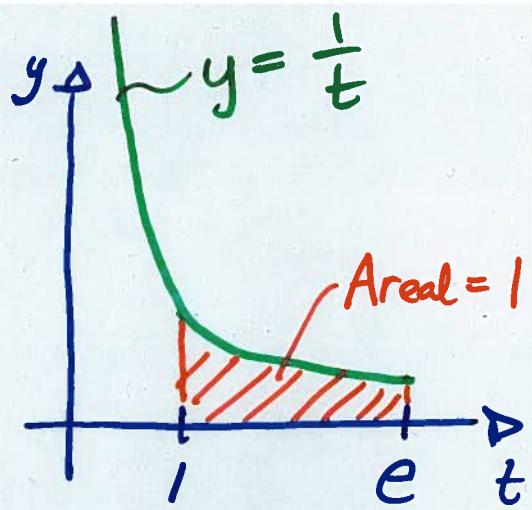
$$\bullet (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\bullet \ln xy = \ln x + \ln y$$

$$\bullet \ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

$$\bullet \ln 1 = 0$$

(og tilsv.  $\exp' = \exp$ ,  $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$ ,  
 $\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$ ,  $\exp(0) = 1$  )



Def. tallet  $e$  slik at

$$\ln e = 1 \\ (\text{dvs. } e = \exp(1))$$

Kan da vise at

$$\exp(r) = e^r \quad \text{for alle rasjonale } r$$

For irrasjonale  $x$  kan vi derfor definere

$$e^x = \exp(x)$$

Mer generelt

$$a^x = e^{x \ln a}$$

(for irrasjonale  $x$  er dette definisjonen av  $a^x$ )