(i) <u>Taylor-rekke rundt $x=a$:</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

(ikke <u>alltid</u> $= f(x)$!)

(ii) <u>Taylors formel</u>

$$f(x) = \underbrace{\boxed{f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}}_{\text{Taylor-polynom } P_n(x)} + \underbrace{\boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}}_{\text{Restledd } R_n(x)}$$

for en $c = c_n(x)$ mellom a og x.

- Hvis $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ <u>for gitt x</u>

så er $f(x)$ = Taylorrekken fra (i)

8.10 "Binomialrekker"

Eks.

Pascals trekant

$1+x$ — 1 1

$(1+x)^2 = 1+2x+x^2$ — 1 2 1

$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$ — 1 3 3 1

$(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$ — 1 4 6 4

$(1+x)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$ — 1 5 10 10 5 1

$\vdots$

Mer generelt: se på

$$(1+x)^\alpha \qquad (\alpha>0)$$

f.eks. $(\alpha=\frac{1}{2})$ $\sqrt{1+x}$

Taylorrekken til $(1+x)^\alpha$ rundt $x=0$ kalles en "binomialrekke"

15. 1. ordens diff. lign.

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

fri variabel

ukjent funksjon av x

$f(x,y)$ gitt funksjon av to variable

Eks. $\boxed{y' = y - x}$ (*)

Sjekk at

$$\boxed{y = y(x) = x + 1 + Ce^x}$$

er løsn. av (*) (vilkårlig konst. C)

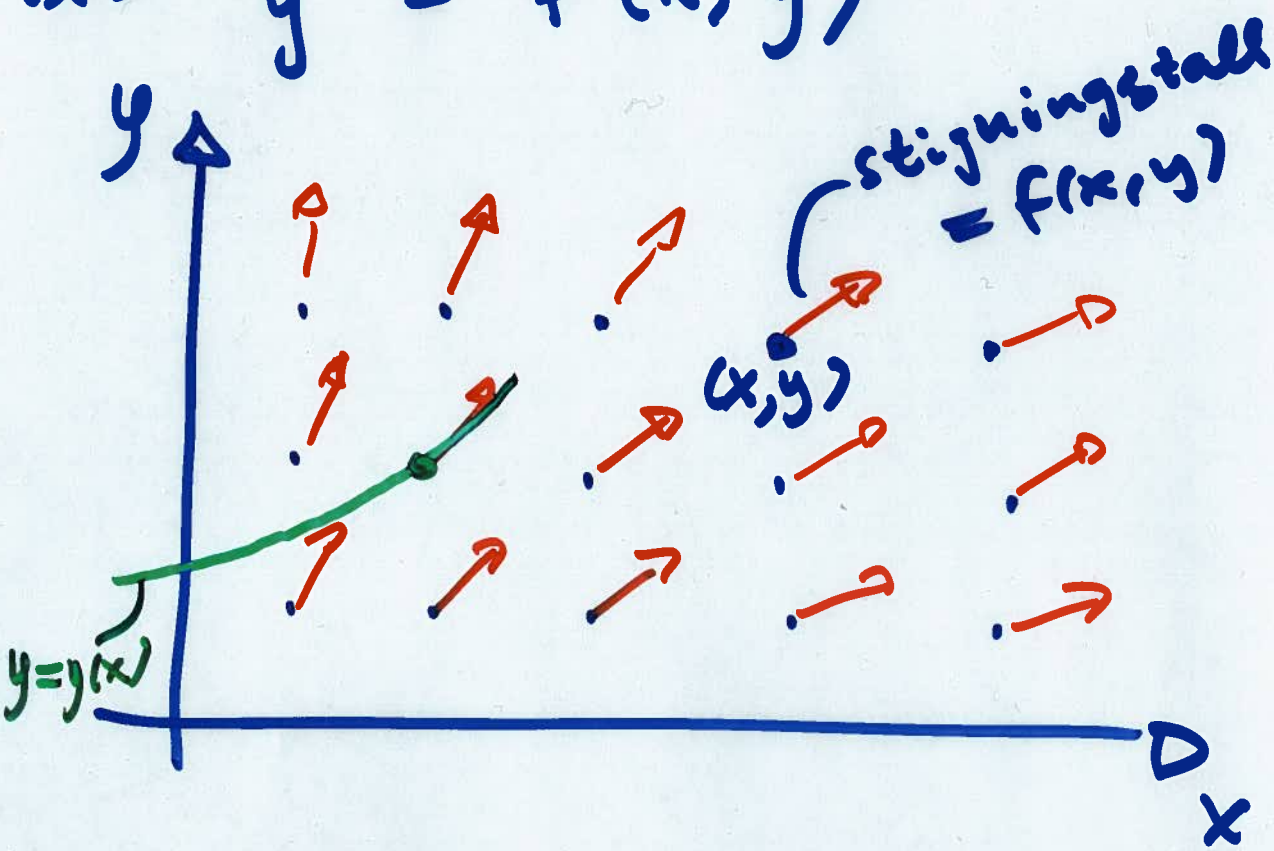
V.S. $y' = 1 + Ce^x$

H.S. $y - x = (x + 1 + Ce^x) - x = 1 + Ce^x$

V.S = H.S. dvs. y er løsn.

Retningsdiagram (slope field)

(*) $y' = f(x, y)$



En løsning $y = y(x)$ av (*)

gir en "løsningskurve" i xy-planet

dvs. grafen $y = y(x)$

Eksistens/entydighet av løsninger.

Eks.
$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} & (1) \\ y(0) = 0 & (2) \end{cases}$$

Løsn. separabel:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx$$

$$2\sqrt{y} = x + C$$

$$y = \left(\frac{x}{2} + C'\right)^2 \qquad \left(C' = \frac{C}{2}\right)$$

Men: $y=0$ er også løsning!

Setter inn $x=0$: $y(0) \underset{(2)}{=} 0 = (0 + C')^2$
$= (C')^2$

$\Rightarrow C' = 0$

dvs. $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$ (sjekk)