$n^{\underline{te}}$-leddstesten for divergens

Hvis
$$a_n \not\to 0$$
så **divergerer** $\sum a_n$.

Hvorfor:

Hvis $\sum a_n$ **konvergerer**,
så må $a_n \to 0$

(Fordi
$$a_n = s_n - s_{n-1}$$
$$\to L - L = 0)$$

(NB! $\sum a_n$ kan **divergere** selv om $a_n \to 0$!)

$\sum a_n$ med $a_n \geq 0$:

To muligheter:

(i) $\boxed{\sum a_n < \infty}$ (konvergens)

(ii) $\boxed{\sum a_n = \infty}$ (divergens mot ∞)

Hvorfor? Følgen av delsummer

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

er ikke-avtagende:

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots$$

så derfor enten:

(i) s_n har øvre skranke og konvergerer

eller

(ii) s_n vokser ubegrenset

Integraltesten

Anta

$$\boxed{a_n = f(n)} \quad (n \geq N)$$

et heltall ≥ 1

der

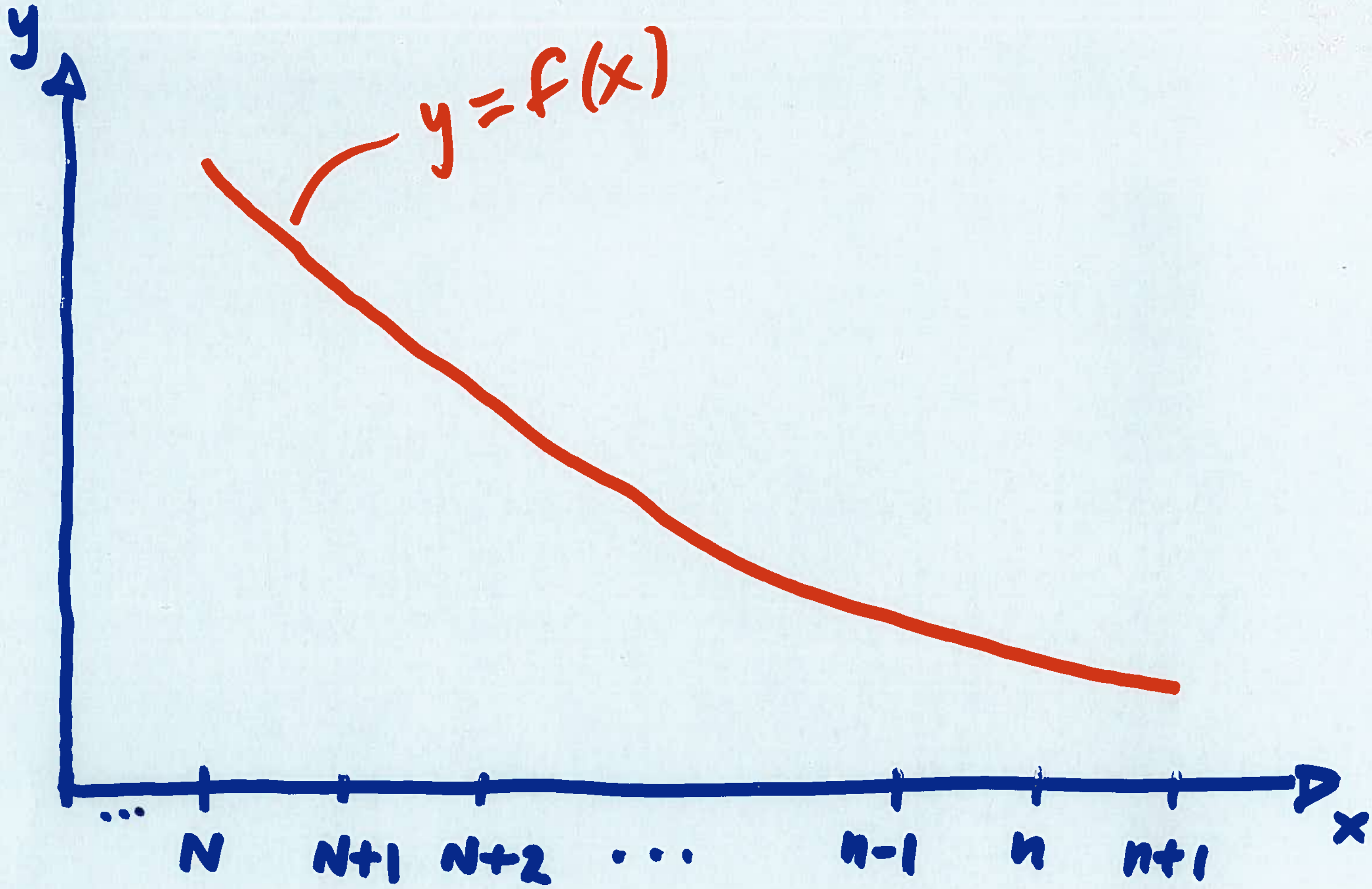
- $f(x)$ er kont. på $[N, \infty)$
- $f(x) \geq 0$ —— " ——
- f er avtagende —— " ——

Da har vi at

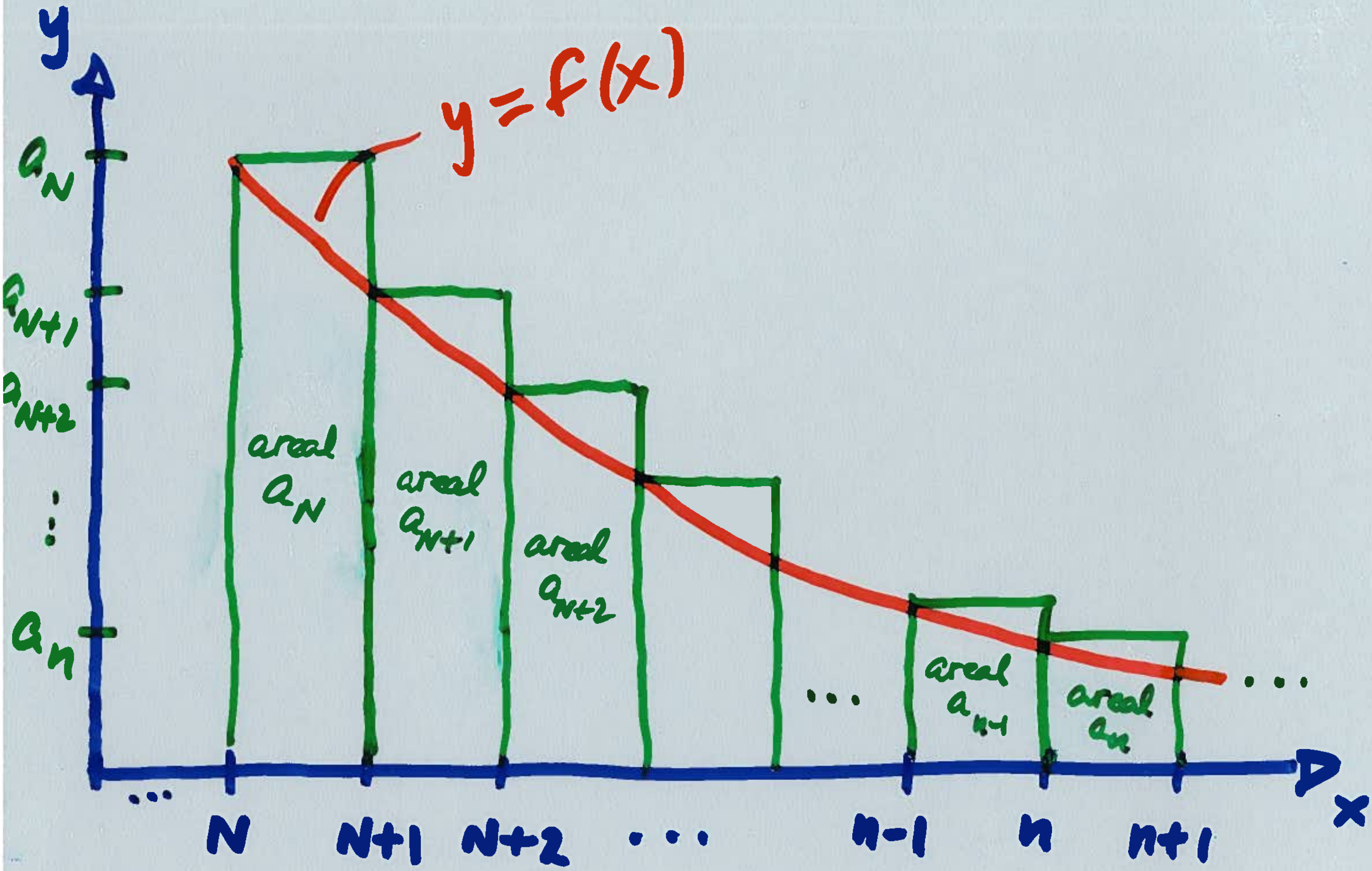
$$\boxed{\sum_{n=N}^{\infty} a_n} \quad \text{og} \quad \boxed{\int_N^{\infty} f(x)\,dx}$$

enten <u>begge</u> <u>konvergerer</u>

eller <u>begge</u> <u>divergerer</u>.



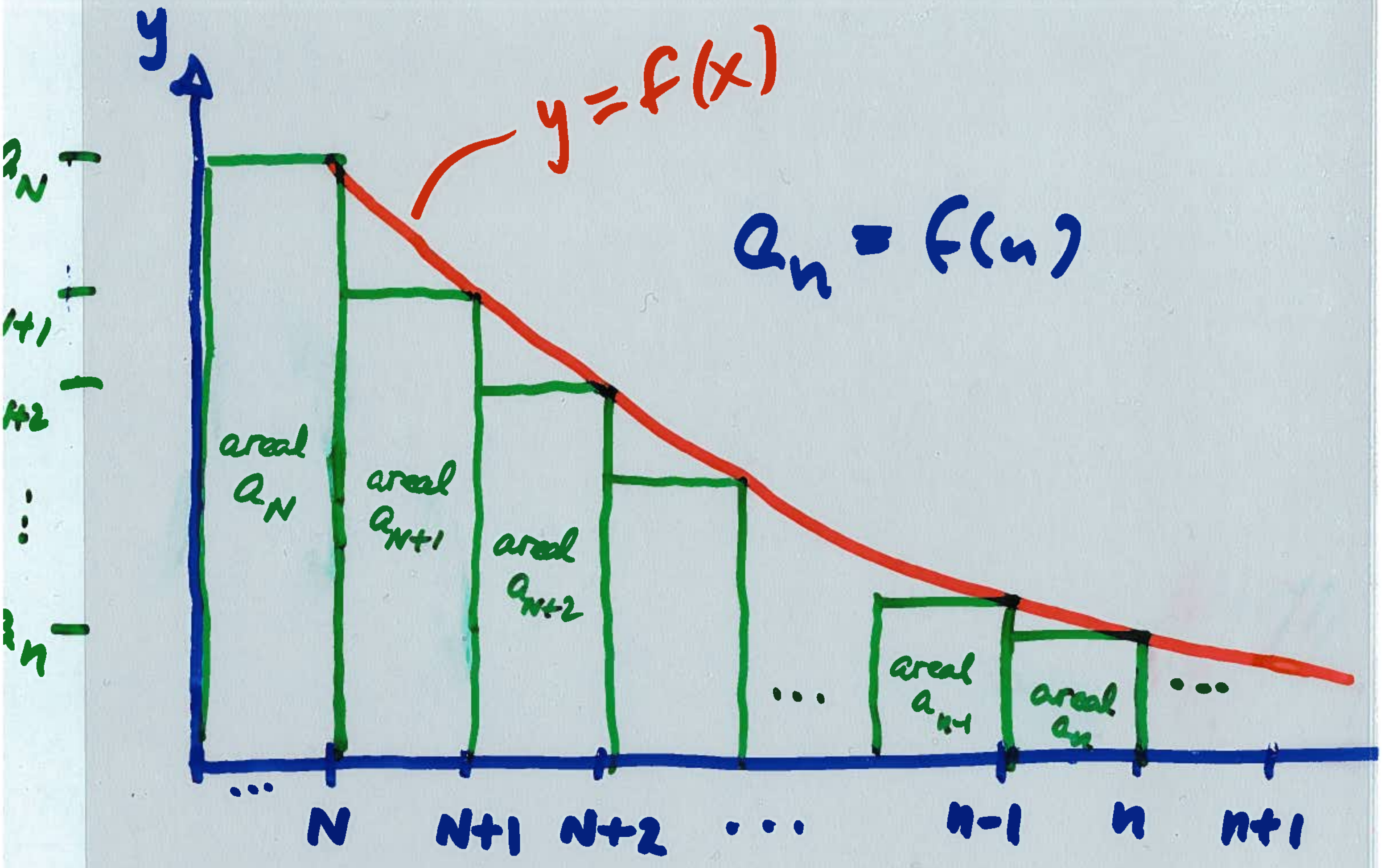
y
y=f(x)
x
...
N
N+1
N+2
...
n-1
n
n+1



Sammenligner arealer:

$$(1) \qquad a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n > \int_N^{n+1} f(x)\,dx$$

$$(2) \qquad a_{N+1} + \cdots + a_n < \int_N^{n} f(x)\,dx$$



Sammenligner arealer:

(1) $a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n > \int_N^{n+1} f(x)\,dx$

(2) $a_{N+1} + \cdots + a_n < \int_N^{n} f(x)\,dx$

Feilestimat for integraltesten

- Anta konvergens:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S < \infty$$

dvs.

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S.$$

- Se på feilen

$$S - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$
$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

- Har estimat:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fra}(1)}}{\leq} S - s_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fra}(2)}}{\leq} \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

dvs.

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx < S < s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

① Sammenligningstest

Antas

$$0 \le a_n \le b_n$$

(i) $\boxed{\sum b_n < \infty \implies \sum a_n < \infty}$

(ii) $\boxed{\sum a_n = \infty \implies \sum b_n = \infty}$

② Grensesammenligningstest

Anta $a_n \ge 0$ og $b_n > 0$.

- Hvis $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, der $0 < c < \infty$, så vil

$$\sum a_n \quad \text{og} \quad \sum b_n$$

enten begge konvergere eller begge divergere

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ og $\sum b_n < \infty \implies \sum a_n < \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ og $\sum b_n = \infty \implies \sum a_n = \infty$

Forholdstest for Σa_n med $a_n > 0$.

Anta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

eksisterer.

Da har vi

- $\boxed{\rho < 1 \Rightarrow \Sigma a_n < \infty}$ (konvergens)
- $\boxed{\rho > 1 \Rightarrow \Sigma a_n = \infty}$ (divergens mot ∞)
- $\rho = 1$ ingen konklusjon

$\rightarrow$ jfr. eksemplene $\Sigma \frac{1}{n}$ og $\Sigma \frac{1}{n^2}$

Rottest for $\sum a_n$ med $a_n \geq 0$.

Anta at

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

eksisterer.

Da har vi:

- $\boxed{\rho < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n < \infty}$ (konvergens)
- $\boxed{\rho > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n = \infty}$ (divergens mot ∞)
- $\rho = 1$ ingen konklusjon

$$\boxed{\text{jfr. eksemplene } \sum \frac{1}{n} \text{ og } \sum \frac{1}{n^2}}$$