

## KRAFT OG ARBEID

**OPPGAVE:** Hvor mye arbeid må brukes for å tømme et fullt halvkuleformet vannreservoar med radius 10 meter ved å pumpe vannet til en høyde av 5 meter over reservoarets topp?

**LØSNING:** Vi innsetter vannreservoaret i et koordinatsystem slik at reservoarets topp er på  $x$ -aksen og reservoarets bunn er i punktet  $(0, -10)$ .

La  $P = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$  være en partisjon av intervallet  $[-10, 0]$ . Volumet av det vannet som er i reservoaret i en strimmel mellom  $y_{k-1}$  og  $y_k$  er tilnærmelesvis lik med  $\Delta V_k = \pi x^2 (y_k - y_{k-1}) \text{ m}^3 = \pi(100 - y^2) \Delta y_k \text{ m}^3$ . Det arbeidet det skal brukes på å pumpe dette vannet til en høyde 5 meter over reservoarets topp er tilnærmelesvis lik med

$$\Delta W_k = (5 - y_k) \text{ m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \Delta V_k = \pi(5 - y_k) \cdot 9810 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{s}^2} \cdot (100 - y^2) \Delta y_k.$$

Vi har derfor at det arbeidet det skal brukes for å pumpe alt vannet til en høyde av 5 meter over reservoarets topp er lik

$$\begin{aligned} W &= 9810\pi \int_{-10}^0 (5 - y)(100 - y^2) dy \text{ J} \\ &= 9810\pi \int_{-10}^0 500 - 100y - 5y^2 + y^3 dy \text{ J} \\ &= 9810\pi \left[ 500y - 50y^2 - \frac{5}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 \right]_{-10}^0 \text{ J} \\ &= 0 - 9810\pi(-5000 - 5000 + \frac{5000}{3} + 2500) \text{ J} \\ &= 9810 \cdot 5000\pi(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}) \text{ J} \\ &= 49050000\pi \frac{7}{6} \text{ J} \approx 1,8 \cdot 10^8 \text{ J}. \end{aligned}$$