Denne ukens program

Dagens program

8.3 Integraltesten (fortsatt)

8.4 Sammenligningstesten og grensesammenligningstesten

8.5 Forholdstesten og rottesten

8.6 Alternerende rekker og absolutt og betinget konvergens

Programmet for i morgen

8.7 Potensrekker

8.8 Taylor- og Maclaurinrekker

Følger og rekker

En *følge* er en uendelig sekvens $a_1, a_2, a_3, \dots$ av tall.

Ut fra en følge $a_1, a_2, a_3, \dots$ kan vi danne en ny følge $s_1.s_2, s_3, \dots$ ved å la $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kalles *rekken* generert av $\{a_n\}$.

Hvis følgen $\{s_n\}$ er konvergent sier vi at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergerer* og vi kaller $\lim_{n\to\infty} s_n$ for summen av rekken og skriver $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$.

Konvergens av ikke-negative rekker

Korollary side 523

En rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bestående av ikke-negative ledd er konvergent hvis og bare hvis det finnes en øvre skranke for de partielle summer $\sum_{k=1}^{n} a_k$ (dvs. hvis og bare hvis det finnes et tall M slik at $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq M$ for alle n).

Integraltesten

Theorem 9 side 525

La $\{a_n\}$ være en følge med ikke-negative ledd.
Anta at det finnes en N og en ikke-negativ, ikke-voksende kontinuerlig funksjon f definert på intervallet $[N, \infty)$ slik at $f(n) = a_n$ for alle $n \geq N$.
Da er rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent hvis og bare hvis integralet $\int_N^{\infty} f(x)dx$ er konvergent.

Sammenligningstesten

Theorem 10 side 529

La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ være ikke-negative rekker.

1. Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent og at det finnes en N slik at $b_n \leq a_n$ for alle $n \geq N$. Da er $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.
2. Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er divergent og at det finnes en N slik at $b_n \leq a_n$ for alle $n \geq N$. Da er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Grensesammenligningstesten

Theorem 11 side 530

La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ være positive rekker.

1. Anta at $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$ og at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er divergent. Da er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.
2. Anta at $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ og at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent. Da er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Dvs. hvis $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, \infty)$ da er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ enten begge konvergente eller divergente.

Forholdstesten

Theorem 12 side 533

La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en rekke med positive ledd og anta at grenseverdien $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ eksisterer eller er lik ∞. Da gjelder:

1. Dersom $\rho < 1$ konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. Dersom $\rho > 1$ divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Rottesten

Theorem 13 side 535

La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en rekke med positive ledd og anta at grenseverdien $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ eksisterer eller er lik ∞. Da gjelder:

1. Dersom $\rho < 1$ konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. Dersom $\rho > 1$ divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Alternerende rekker

En rekke på formen $\sum_{n=1} \infty (-1)^{n+1} u_n$ hvor $u_n \geq 0$ for alle n kalles *alternerende*.

Leibnizs teorem

Theorem 14 og 15 side 538–539

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ konvergerer dersom følgende 3 betingelser alle er oppfylte:

1. $u_n \geq 0$ for alle n.
2. $u_n \geq u_{n+1}$ for alle n.
3. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Dessuten er

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n - \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}u_k\right| \leq u_{N+1}$$

for alle N og $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n - \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}u_k$ er ikke-negativ hvis N er et partall og ikke-positiv hvis N er et odde tall.