Dagens program

3.8 Deriverte av inverse trigonometriske funksjoner (fortsatt)

3.9 Koplede hastigheter

3.10 Linearisering

3.11 Hyperbolske funksjoner

Deriverte af inverse trigonometriske funksjoner

$\arcsin(x)$

1. $\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$ er den inverse til funksjonen $f(x) = \sin(x)$, $D(f) = [-\pi/2, \pi/2]$.
2. $D(\arcsin(x)) = V(f) = [-1, 1]$.
3. $\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

$\arccos(x)$

1. $\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$ er den inverse til funksjonen $f(x) = \cos(x)$, $D(f) = [0, \pi]$.
2. $D(\arccos(x)) = V(f) = [-1, 1]$.
3. $\frac{d}{dx}(\arccos(x)) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

Deriverte af inverse trigonometriske funksjoner

$\arctan(x)$

1. $\arctan(x) = \tan^{-1}(x)$ er den inverse til funksjonen $f(x) = \tan(x)$, $D(f) = (-\pi/2, \pi/2)$.
2. $D(\arctan(x)) = V(f) = (-\infty, \infty)$.
3. $\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$ for alle x.

$\operatorname{arccot}(x)$

1. $\operatorname{arccot}(x) = \cot^{-1}(x)$ er den inverse til funksjonen $f(x) = \cot(x)$, $D(f) = (0, \pi)$.
2. $D(\operatorname{arccot}(x)) = V(f) = (-\infty, \infty)$.
3. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot}(x)) = \frac{-1}{1+x^2}$ for alle x.

Deriverte af inverse trigonometriske funksjoner

$\operatorname{arcsec}(x)$

1. $\operatorname{arcsec}(x) = \sec^{-1}(x)$ er den inverse til funksjonen $f(x) = \sec(x)$, $D(f) = [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$.
2. $D(\operatorname{arcsec}(x)) = V(f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.
3. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec}(x)) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$.

$\operatorname{arccsc}(x)$

1. $\operatorname{arccsc}(x) = \csc^{-1}(x)$ er den inverse til funksjonen $f(x) = \csc(x)$, $D(f) = [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$.
2. $D(\operatorname{arccsc}(x)) = V(f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.
3. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc}(x)) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$.

Formelene til $\arccos(x)$, $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$ og $\operatorname{arccot}(x)$ står på side 89 i Rottmann.

Koplede hastigheter

Eksempel

En bakteriekultur danner en sirkel hvis diameter vokser med 2 cm per time.
Hvor rask vosker arealet av sirkelen når diameteren er 10 cm?

Koplede hastigheter

Eksempel (oppgave 3.9.14)

To fly flyver i 11 km's høyde langs rette linjer som skjærer hverandre i en rett vinkel.
Fly A nærmer seg skjæringspunktet med en fart av 700 km/t og fly B nærmer seg skjæringspunktet med en fart av 600 km/t.
Hvor rask endre avstanden mellom flyvene seg når fly A er 2 km fra skjæringspunktet og fly B er 3 km fra skjæringspunktet?

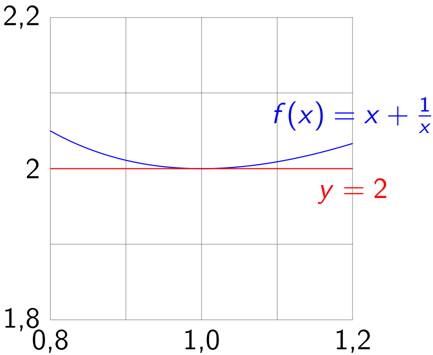
Linearisering

Definisjon

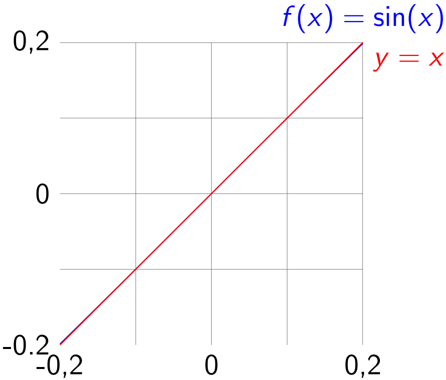
Hvis en funksjon f er deriverbar i punktet $x = a$, kalles funksjonen

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

for *(standard) lineariseringen* av f i a.



x	$f(x)$	$L(x)$
0.80000	2.05000	2
0.90000	2.01111	2
1.00000	2.00000	2
1.10000	2.00909	2
1.20000	2.03333	2



x	$f(x)$	$L(x)$
-0.20000	-0.19867	-0.20000
-0.10000	-0.09983	-0.10000
0.00000	0.00000	0.00000
0.10000	0.09983	0.10000
0.20000	0.19867	0.20000

Tilnærming til endring av y-værdien

Definisjon

La $y = f(x)$ være en deriverbar funksjon. *Differensialet* $dy = f'(x)dx$ er en funksjon som avhenger av to uavhengige variable x og dx.

Eksempel (Oppgave 3.10.58)

Anta at en bedrifts fortjenste ved salg av n gjenstande er $F(n) = 200e^{\frac{-n}{400}}n$.
Estimer endringen og den prosentvise endringen i fortjenesten når salget endre seg fra $n = 145$ til $n = 150$.

Hyperbolske funksjoner

1. $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
2. $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
3. $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
4. $\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, $x \neq 0$
5. $\mathrm{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$
6. $\mathrm{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$, $x \neq 0$

Side 82 i Rottmann.

Formler for hyperbolske funksjoner

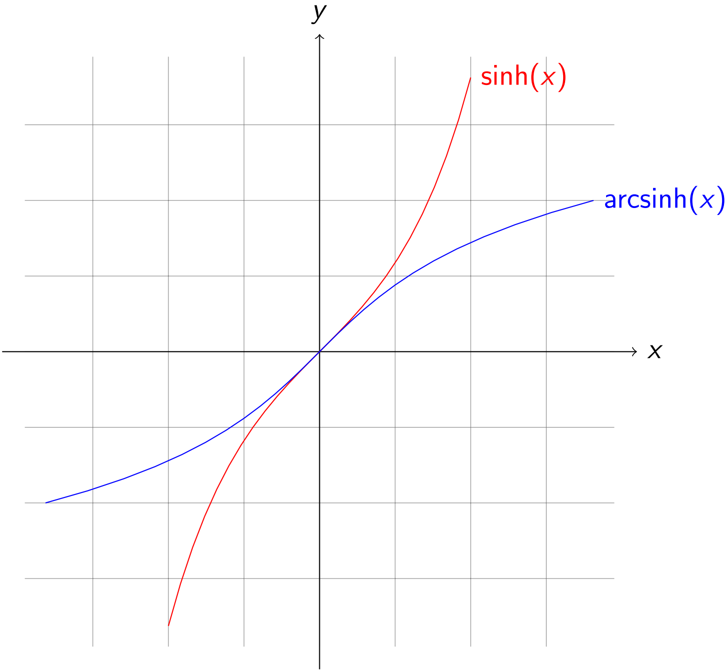
1. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
2. $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$
3. $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$
4. $\cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x)+1}{2}$
5. $\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x)-1}{2}$
6. $\tanh^2(x) = 1 - \operatorname{sech}^2(x)$
7. $\coth^2(x) = 1 + \operatorname{csch}^2(x)$

Side 82–84 i Rottmann.

Deriverte av hyperbolske funksjoner

1. $\frac{d}{dx}(\sinh(x)) = \cosh(x)$
2. $\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \sinh(x)$
3. $\frac{d}{dx}(\tanh(x)) = \operatorname{sech}^2(x)$
4. $\frac{d}{dx}(\coth(x)) = -\operatorname{csch}^2(x)$
5. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}(x)) = -\operatorname{sech}(x)\tanh(x)$
6. $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}(x)) = -\operatorname{csch}(x)\coth(x)$

Side 130 i Rottmann.

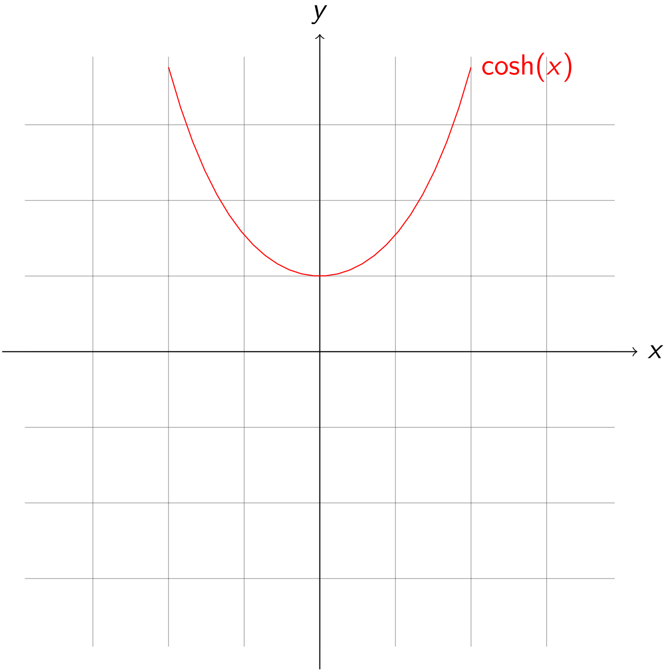


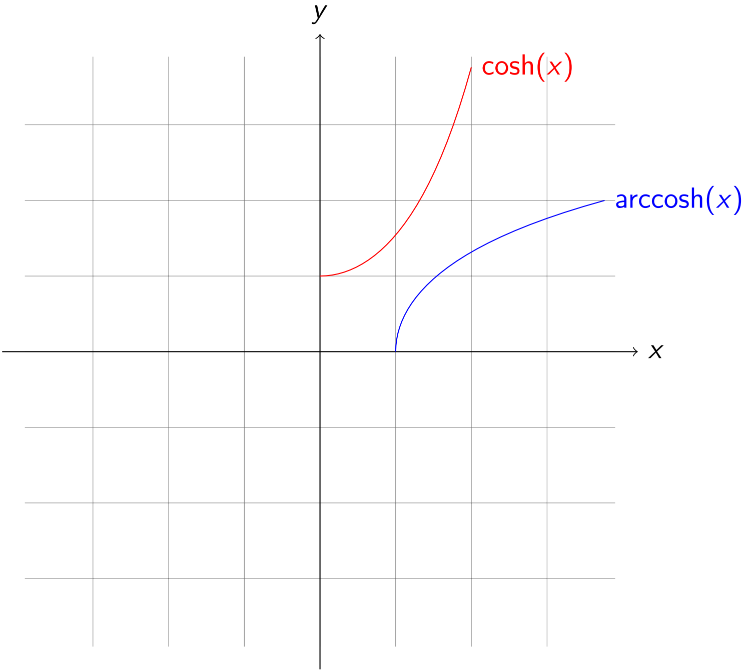
y
x
sinh(x)
arcsinh(x)

Inverse til hyperbolske funksjoner

1. $\text{arcsinh}(x) = \sinh^{-1}(x)$ er den inverse til $\sinh(x)$;
   $D(\text{arcsinh}(x)) = (-\infty, \infty)$.
2. $\text{arccosh}(x) = \cosh^{-1}(x)$ er den inverse til $f(x) = \cosh(x)$,
   $D(f) = [0, \infty)$; $D(\text{arccosh}(x)) = [1, \infty)$.
3. $\text{arctanh}(x) = \tanh^{-1}(x)$ er den inverse til $\tanh(x)$;
   $D(\text{arctanh}(x)) = (-1, 1)$.
4. $\text{arccoth}(x) = \coth^{-1}(x)$ er den inverse til $\coth(x)$;
   $D(\text{arccoth}(x)) = (-\infty, 1-) \cup (1, \infty)$.
5. $\text{arcsech}(x) = \text{sech}^{-1}(x)$ er den inverse til $f(x) = \text{sech}(x)$,
   $D(f) = [0, \infty)$; $D(\text{arcsech}(x)) = (0, 1]$.
6. $\text{arccsch}(x) = \text{csch}^{-1}(x)$ er den inverse til $\text{csch}(x)$;
   $D(\text{arccsch}(x)) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Side 89 i Rottmann.


y
x
cosh(x)



y
cosh(x)
arccosh(x)
x

Inverse til hyperbolske funksjoner

1. $\text{arcsinh}(x) = \sinh^{-1}(x)$ er den inverse til $\sinh(x)$; $D(\text{arcsinh}(x)) = (-\infty, \infty)$.
2. $\text{arccosh}(x) = \cosh^{-1}(x)$ er den inverse til $f(x) = \cosh(x)$, $D(f) = [0, \infty)$; $D(\text{arccosh}(x)) = [1, \infty)$.
3. $\text{arctanh}(x) = \tanh^{-1}(x)$ er den inverse til $\tanh(x)$; $D(\text{arctanh}(x)) = (-1, 1)$.
4. $\text{arccoth}(x) = \coth^{-1}(x)$ er den inverse til $\coth(x)$; $D(\text{arccoth}(x)) = (-\infty, 1-) \cup (1, \infty)$.
5. $\text{arcsech}(x) = \text{sech}^{-1}(x)$ er den inverse til $f(x) = \text{sech}(x)$, $D(f) = [0, \infty)$; $D(\text{arcsech}(x)) = (0, 1]$.
6. $\text{arccsch}(x) = \text{csch}^{-1}(x)$ er den inverse til $\text{csch}(x)$; $D(\text{arccsch}(x)) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Side 89 i Rottmann.

Inverse hyperbolske funksjoner

1. $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
2. $\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \geq 1$
3. $\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$, $|x| < 1$
4. $\operatorname{arccoth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$, $|x| > 1$
5. $\operatorname{arcsech}(x) = \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right)$, $0 < x \leq 1$
6. $\operatorname{arccsch}(x) = \ln \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \right)$, $x \neq 0$

Deriverte af inverse hyperbolske funksjoner

1. $\frac{d}{dx}(\text{arcsinh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $\frac{d}{dx}(\text{arccosh}(x)) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$
3. $\frac{d}{dx}(\text{arctanh}(x)) = \frac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$
4. $\frac{d}{dx}(\text{arccoth}(x)) = \frac{-1}{1-x^2}$, $|x| > 1$
5. $\frac{d}{dx}(\text{arcsech}(x)) = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $0 < x < 1$
6. $\frac{d}{dx}(\text{arccsch}(x)) = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$, $x \neq 0$

Side 130 i Rottmann.