Eksamensoppgaver

75001, 75011 og SIF5003 Matematikk 1/1A

Samlet for SIF5003 Matematikk 1 høsten 2002

Samlingen inneholder de fleste oppgaver gitt i 75001 og 75011 Matematikk 1A og enkelte oppgaver fra 75020 Matematikk 2 ved NTH/NTNU i tiden 1993–1998. Oppgaver eller punkter som faller helt eller delvis utenfor pensum i SIF5003 er ikke tatt med. Oppgavene er grovt inndelt etter emne og omtrentlig sortert i den rekkefølgen stoffet undervises i SIF5003.

Høsten 2002 er eksamensoppgavene fra høsten 1997 og kontinuasjonseksamen 1998 lagt til – på slutten, så oppgavenumrene på de øvrige oppgavene er uendret fra forrige utgave av samlingen.

En fasit starter på side 23.

På `http://www.math.ntnu.no/fag/kode/SIF5003/gamle-eks/` *vil du kunne finne en liste over eventuelle kjente feil i fasiten eller oppgavesettet for øvrig. Der kan du også finne ut hvordan du rapporterer om feil du selv finner, og du kan hente siste versjon av samlingen.*

Oppgave 1 (1993–08–23: 75011 oppgave 2)
For hvilke reelle tall x gjelder ulikheten

$$1 < \left|\frac{1}{2x+1}\right| < 2\,?$$

Oppgave 2 (1993–12–08: 75001 oppgave 1, 75011 oppgave 1)

a) Bestem grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2}-1)\,dt}{x^3}.$$

b) Bestem grenseverdien

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos x}{\ln(1+\sin Bx)}$$

for alle $B > 0$.

Oppgave 3 (1995–12–15: 75001 oppgave 1, 75011 oppgave 1)
Beregn grenseverdiene

$$\text{(i)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) \qquad \text{og} \qquad \text{(ii)}\quad \lim_{x\to 1}\frac{2x-\sqrt{1+kx}}{x-\sqrt{x}}.$$

I (ii) skal konstanten k ha den verdien som gjør at grenseverdien eksisterer (og er endelig).

Oppgave 4 (1993–08–23: 75011 oppgave 3)
Finn ligningen for tangenten til kurven

$$2xy + \sin y = 2\pi$$

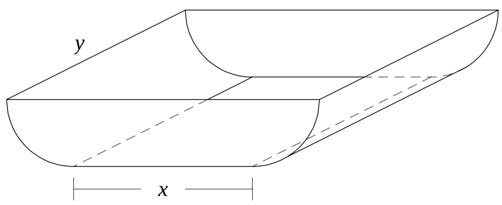
i punktet $(1,\,\pi)$.

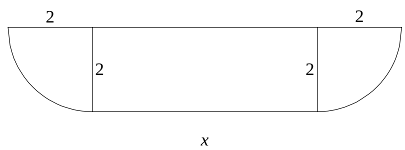
Oppgave 5 (1994–08–15: 75001 oppgave 3, 75011 oppgave 3)
Et kuleformet akvarium med radius 30 cm fylles med vann, 50 cm^3 pr. sekund. Hvor hurtig stiger vannet i akvariet ved det tidspunkt da vanndybden (midt i akvariet) er 10 cm?

Oppgave 6 (1994–08–15: 75001 oppgave 4, 75011 oppgave 4)
En wire med lengde L deles i to deler. Den ene delen bøyes til et kvadrat og den andre til en likesidet trekant. Avgjør hvordan wiren skal deles for at summen av de to arealene skal bli minst mulig.

Oppgave 7 (1994–08–15: 75001 oppgave 5, 75011 oppgave 5)
Vis at ligningen $x^3 = \cos x$ har nøyaktig en løsning og at denne ligger mellom 0 og 1. Bruk Newtons metode til å finne løsningen med to korrekte desimaler.

Oppgave 8 (1994–12–16: 75001 oppgave 4, 75011 oppgave 4)
Et åpent trau er formet som på figuren, bunnflata er et rektangel med bredde x og lengde y. Endeflatene er plane flater som består av et rektangel og to kvartsirkler med radius 2. Trauet har et gitt volum $V = 16\pi$.





Finn dimensjonene (x og y) av trauet når arealet A av overflata (dvs. bunnflata, de to endeflatene og de to krumme sideflatene) er minst mulig.

Oppgave 9 (1994–12–16: 75001 oppgave 5, 75011 oppgave 5)

a) Gitt funksjonen
$$f(x) = x^{\alpha-1} - \alpha \ln x, \qquad x > 0$$
der α er en konstant, $\alpha > 1$.

Vis at $f(x)$ oppnår sin minimumsverdi for $x = \left[\frac{\alpha}{\alpha-1}\right]^{1/(\alpha-1)}$. For hvilke verdier av α er minimumsverdien negativ?

b) Gjør rede for at ligningen
$$x^{1/3} - \frac{4}{3}\ln x = 0$$
har nøyaktig to løsninger. Velg en startverdi x_0 og bruk Newtons metode til å finne tilnærmingsverdier x_1, x_2 for den største av de to løsningene.

Oppgave 10 (1995–08–26: 75001 oppgave 2)
Volumet av en kuleformet ballong øker med konstant vekstrate lik 8 cm^3 pr. minutt. Hvor fort øker radien på det tidspunktet da radien er nøyaktig 10 cm?

Hvor fort øker arealet av ballongens overflate ved det samme tidspunktet?

Oppgave 11 (1996–08–19: 75001 oppgave 3, 75011 oppgave 3)
En politipatrulje skal foreta en radarkontroll ved innkjørselen til en tunnel. Veien antas å være rett og går i nord/sør-retning. 200 m fra tunnelåpningen står et skilt som angir hastigheten til 70 km/h. En politimann som står 200 m rett øst for tunnelåpningen retter en laserpistol mot en bil idet den passerer skiltet. Laserpistolen angir at avstanden til bilen avtar med 65 km/h ved dette tidspunktet.

Kjører bilen for fort? Svaret skal begrunnes.

Oppgave 12 (1996–08–19: 75001 oppgave 4, 75011 oppgave 4)
Bensinforbruket F til en bil varierer med hastigheten v (mil per time). Forbruket i liter per mil varierer etter formelen

$$F(v) = \frac{e^v + e^{-v}}{2} + \frac{1}{v}, \quad v > 0.$$

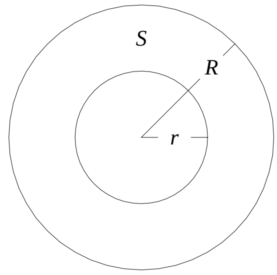
a) Finn en ligning som bestemmer den hastigheten v_0 som gir minimalt bensinforbruk.

b) Bruk Newtons metode med utgangspunkt $v = 1$ til å finne en tilnærmet løsning av ligningen

$$v^2 e^v - v^2 e^{-v} - 2 = 0.$$

Bruk to desimalers nøyaktighet.

Oppgave 13 (1996–12–07: 75001 oppgave 4, 75011 oppgave 4)



La A være arealet av det ringformede området S begrenset av to konsentriske sirkler med radier henholdsvis r og R, se figuren.

Vi tenker oss at r og R, og følgelig A, varierer med tiden t.

a) Finn vekstraten for A mhp. t i det øyeblikket at $r = 4$ cm og øker med 0,02 cm/s mens $R = 5$ cm og øker med 0,01 cm/s.

b) Anta nå at $r = 2$ og $R = 4$ ved tidspunktet $t = 0$, og at både r og R øker eksponentielt:

$$r = 2e^{\alpha t} \quad \text{og} \quad R = 4e^{\beta t}, \qquad t \geq 0,$$

der α og β er positive konstanter.

Under hvilke forutsetninger om α og β vil A først øke og deretter avta til 0? Angi tidspunktet t_1 når A oppnår maksimumsverdien og tidspunktet t_2 når A blir 0.

Oppgave 14 (1997–08–18: 75001 oppgave 3, 75011 oppgave 3)
Vis at grafen til ligningen

$$x^3 + y^3 = xy - 1$$

ikke har horisontal tangent ($dy/dx = 0$) i noen punkter.

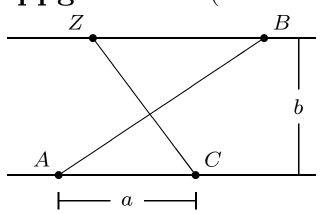
Oppgave 15 (1997–08–18: 75001 oppgave 4, 75011 oppgave 4)
Anta at farten, i meter pr. sekund, til en sprinter, når han har løpt x meter av et 100-meterløp, er gitt ved funksjonen

$$v(x) = \frac{7}{40}\sqrt{160x - x^2}, \qquad 0 \leq x \leq 100.$$

a) Hva er mannens maksimumsfart, og hvor langt har han løpt når maksimumsfarten oppnås? Bestem også mannens akselerasjon dv/dt som funksjon av x.

b) Hvor lang tid bruker mannen på 100-meteren?

Oppgave 16 (1993–12–08: 75001 oppgave 3, 75011 oppgave 3)



To parallelle linjer skjæres av en rett linje AB. Se figuren. Fra punktet C trekkes en rett linje til punktet merket Z.
Bestem beliggenheten av Z slik at summen av arealene av de to trekantene vi får blir minst mulig.

Oppgave 17 (1996–08–19: 75001 oppgave 5, 75011 oppgave 5)
Vis at funksjonen

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) - 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

er konstant for $0 \leq x \leq 4$. Hva er funksjonens konstante verdi?

Oppgave 18 (1993–12–08: 75001 oppgave 2, 75011 oppgave 2)
Vis ved induksjon at

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

for alle positive heltall n.

Oppgave 19 (1994–12–16: 75001 oppgave 3, 75011 oppgave 3)
Vis ved induksjon at

$$(\cos u)(\cos 2u)(\cos 4u)(\cos 8u)\cdots[\cos(2^{n-1}u)] = \frac{\sin(2^n u)}{2^n \sin u}$$

for alle hele tall $n \geq 1$.

Oppgave 20 (1995–08–26: 75001 oppgave 3, 75011 oppgave 3)
Vis ved induksjon at

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i i^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

for alle positive heltall n.

Oppgave 21 (1995–12–15: 75001 oppgave 4, 75011 oppgave 5)
Angi en funksjon $f(x)$ slik at

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n\left(2+\frac{i}{n}\right)\ln\left(2+\frac{i}{n}\right)}$$

er en Riemannsum for f på intervallet $[0,1]$.

Finn grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n\left(2+\frac{i}{n}\right)\ln\left(2+\frac{i}{n}\right)}.$$

Oppgave 22 (1993–08–23: 75011 oppgave 4)
La R være flatestykket i xy-planet som er avgrenset av kurvene

$$x = 1, \quad x = 2, \quad y = -x^2, \quad y = x.$$

La T være rotasjonslegemet som dannes når R roteres om y-aksen.

a) Finn volumet av T.

b) Finn arealet av overflaten til T.

Oppgave 23 (1993–08–23: 75011 oppgave 5)
En boreplattform slepes med hastighet 10 km/time idet slepewiren ryker. Plattformen siger videre, bent fram. Anta at intet gjøres for å stoppe den, men at hastigheten avtar med en rate proporsjonal med kvadratet av hastigheten til enhver tid. Etter 5 minutter er hastigheten sunket til 8 km/time. Hvor lang tid tar det før hastigheten er sunket til 0.5 km/time?

Hvor lang strekning har da plattformen drevet?

Oppgave 24 (1993–08–23: 75011 oppgave 6)

a) Vis at kurven

$$x = \sqrt{3}\cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

er en ellipse med buelengde

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{2-\cos u}\, du.$$

b) La L være som i a). Bruk trapesmetoden til å beregne L med en feil < 0.5.

Oppgave 25 (1993–12–08: 75001 oppgave 4)
Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-y-2}{x^2+2x+2}, \qquad y(-1) = 1.$$

Oppgave 26 (1994–08–15: 75011 oppgave 6)
I denne oppgaven ser vi på en matematisk modell for et legeme som faller fritt, uten luftmotstand, i jordas gravitasjonsfelt. Dersom h er legemets høyde over jordoverflaten og angis med jordradien som enhet, så er sammenhengen mellom h og legemets fart v bestemt av differensialligningen

$$v\frac{dv}{dh} = -\left(\frac{b}{1+h}\right)^2$$

der b er en positiv konstant.

a) Anta at legemet slippes uten begynnelsesfart fra høyden $h = 1$. Vis, ved å løse differensialligningen ovenfor, at legemets fart (absoluttverdien) i høyden h blir

$$v = b\frac{\sqrt{1-h^2}}{1+h}.$$

Hvilken fart har legemet når det treffer jordoverflaten?

b) La T være falltiden, dvs. tiden fra legemet slippes i høyden $h = 1$ til det treffer jordoverflaten. Vis at

$$T = \frac{1}{b}\left(\frac{\pi}{2}+1\right).$$

Oppgave 27 (1994–08–15: 75001 oppgave 1)

a) Bestem grenseverdien

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt}{x^3}.$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{yx^2}; \quad y(1) = 1.$$

Oppgave 28 (1994–12–16: 75001 oppgave 2, 75011 oppgave 2)
Et vannkar fremkommer ved å dreie kurven

$$x = \sqrt[4]{\sin y} \qquad \text{for } 0 \le y \le \pi/2$$

om y-aksen. (Benevning for x og y er dm.) Sett opp et integral (uten å regne ut integralet) for vannvolumet når vanndybden midt i karet er h.

Karet fylles med vann. Vanmengden som strømmer inn i karet pr. tidsenhet er konstant og lik 2 liter pr. minutt. Hvor fort øker vanndybden h når $h = \pi/6$ dm?

Oppgave 29 (1994–12–16: 75011 oppgave 6)
Finn generell løsning av differensiallikningen

$$y\sqrt{x^3+1}\,y' - \frac{3}{4}x^2(y^2+1) = 0, \qquad x > -1.$$

Bestem løsningen som oppfyller $y(0) = -1$.

Oppgave 30 (1994–12–16: 75011 oppgave 7)
I denne oppgaven gjør vi de forenklede forutsetningene at jorda har form av en kule (med radius r_0) og at temperaturen i lufta er konstant.

a) La $\rho = \rho(h)$ betegne lufttettheten i atmosfæren som funksjon av høyden h over jordoverflata. Endring av ρ pr. lengdeenhet i vertikal retning er proporsjonal med ρ når temperaturen er konstant. Finn $\rho(h)$ når det er kjent at $\rho(0) = \rho_0$, $\rho(100) = \rho_1$.

b) La ΔV betegne volumet av et kuleskall med indre radius $r_0 + h$ og tykkelse Δh. Bruk middelverditeoremet (sekantsetningen) til å vise at vi kan skrive

$$\Delta V = 4\pi(r_0 + h^*)^2 \Delta h$$

der h^* er en verdi i intervallet $(h, h + \Delta h)$. Sett deretter opp et integraluttrykk for massen av all luft over jorda mellom 0 og 100 meters høyde. (Integralet skal ikke regnes ut.)

Oppgave 31 (1994–12–16: 75001 oppgave 1)

a) Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{y+1}}, \qquad y(0) = 0.$$

b) Beregn buelengden til den delen av grafen til løsningen i (a) som ligger mellom $y = 0$ og $y = 2$. (Vink: Uttrykk buelengden som et integral m.h.p. y.)

Oppgave 32 (1995–08–26: 75001 oppgave 1, 75011 oppgave 1)
Vis at

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)\right] = \frac{2}{\cos x}.$$

Finn lengden av kurvestykket

$$y = \ln \cos x, \quad x \in [0, \pi/4]\,.$$

Oppgave 33 (1995–08–26: 75001 oppgave 4, 75011 oppgave 4)

a) Ved rotasjon av parabelen $y = x^2$ om y-aksen fremkommer en rotasjonsparaboloide. Paraboloiden skjæres av et plan P vinkelrett på y-aksen slik at den delen F av rotasjonsparaboloiden som ligger under P har areal $7\pi/6$. Bestem punktet $(0, b)$ der P skjærer y-aksen.

b) En sirkulær sylinder S skal plasseres inne i F med akse langs y-aksen, slik at toppflata til S ligger i planet P. Bestem sylinderen slik at den har størst mulig volum og finn dette volumet.

Oppgave 34 (1995–08–26: 75011 oppgave 6)
En beholder med høyde H har en plan, horisontal bunnflate med areal A_0. I avstanden y over bunnflata er arealet av et horisontalt tverrsnitt gitt ved

$$A(y) = A_0 \left[1 + \frac{y(H-y)}{H^2}\right], \quad 0 \leq y \leq H.$$

a) Bestem volumet av beholderen uttrykt ved A_0 og H.

Beholderen er full av vann og skal tømmes gjennom en åpning i bunnen. Tømmingen foregår slik at volumendringen pr. tidsenhet ved ethvert tidspunkt er proporsjonal med kvadratroten av vanndybden i beholderen. Finn differensialligningen som vanndybden $h = h(t)$ tilfredsstiller.

b) La nå $A_0 = 1$ og $H = 1$. Differensialligningen i punkt (a) blir nå

$$\left[\frac{1}{\sqrt{h}} + \sqrt{h} - h\sqrt{h}\right] \frac{dh}{dt} + k = 0$$

der k er en positiv konstant. La $t = 0$ være det tidspunktet da tømmingen starter, og la $t = T$ være det tidspunktet da vanndybden er $h = 1/4$. Ved hvilket tidspunkt (uttrykt ved T) blir beholderen tom?

Oppgave 35 (1995–12–15: 75001 oppgave 3, 75011 oppgave 4)
La a og h være positive tall. En skål fremkommer ved at kurven med ligning

$$y = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq x < a \\ (2h/\pi) \arcsin{(x-a)} & \text{for } a \leq x \leq a+1 \end{cases}$$

roteres om y-aksen.

a) Hva er høyden av skåla? Tegn figur, og regn ut volumet av skåla uttrykt ved a og h.

b) Skåla skal lages slik at produktet av høyden og radius i bunnflata er lik 1. Volumet av skåla er da gitt ved

$$V = \pi a + \frac{\pi}{2a} + 4.$$

Finn den verdien av a som gir minst mulig volum. Angi dette volumet og begrunn at det virkelig er minimumsvolumet.

Oppgave 36 (1995–12–15: 75011 oppgave 7)
Ved en kjernefysisk prøvesprengning under havbunnen i Stillehavet stiger temperaturen på havbunnen. Sjøvannet over antas å holde en konstant temperatur på 20 °C.

La T være temperaturen på havbunnen. Målinger viser at etter prøvesprengningen, som vi antar inntreffer ved tiden $t = 0$, er temperaturendringen på bunnen proporsjonal med temperaturdifferansen mellom havbunn og sjøvannet over.

Skriv opp en differensialligning som temperaturen T nå oppfyller, og løs denne når temperaturen ved tiden $t = 0$ er 25 °C. Hvor lang tid tar det før temperaturen på bunnen er 21 °C når målinger viser at $T = 22$ °C etter $t = 3$ timer?

Oppgave 37 (1996–08–19: 75001 oppgave 6, 75011 oppgave 6)
La $f(x)$ være en ikke-negativ funksjon som er deriverbar med kontinuerlig derivert for $x \geq 1$. Ved rotasjon om y-aksen av kurven $y = f(x)$ fra $x = 1$ til $x = u$ framkommer en rotasjonsflate med areal $H(u)$.

Bestem funksjonen $f(x)$ når det er gitt at

$$H(u) = \frac{4\pi}{5}\left(u^{5/2} - 1\right) \quad \text{og} \quad f(1) = 0.$$

Oppgave 38 (1996–12–07: 75011 oppgave 2)
Vi er interessert i å beskrive hvor fort et rykte sprer seg i en befolkning. Vi tenker oss en befolkning med et fast antall individer som vi antar er P. La $y = y(t)$ være en deriverbar funksjon som tilnærmet gir det antall individer som kjenner ryktet ved tiden t (målt i uker), dy/dt er spredningsraten. Vi antar at spredningsraten til enhver tid er proporsjonal med produktet av antall individer som kjenner til ryktet og antall individer som ikke gjør det. Still opp en differensialligning for y.

Anta at en femtedel av befolkningen kjenner ryktet ved tiden $t = 0$ og at en tredjedel av befolkningen kjenner ryktet etter $t = 1$ uke. Finn y som funksjon av t.

Hvor lang tid tar det før 80 % av befolkningen har hørt ryktet?

Oppgave 39 (1996–12–07: 75001 oppgave 3, 75011 oppgave 3)

a) En beholder med høyde h lages ved å rotere kurven $y = x^2$, $0 \leq x \leq \sqrt{h}$, om aksen $x = -1$ og sette en plan bunn i.

Vis at volumet V av beholderen er

$$V = \frac{\pi}{6}\left(6h + 8h^{3/2} + 3h^2\right).$$

b) Bruk Newtons metode til å finne høyden h av beholderen med 2 korrekte desimaler når beholderen skal ha volum $V = 10$.

Oppgave 40 (1996–12–07: 75001 oppgave 2)
En bilfører tester hvor lang strekning han bruker for å stoppe bilen. Når farten er 30 km/h bruker han 15 m, og når farten er 60 km/h bruker han 50 m. Anta at førerens reaksjonstid t_0 er konstant, at hastigheten i reaksjonstiden er konstant og at retardasjonen $-a$ etter at bremsene er trykket inn er konstant.

Hvor lang strekning vil han da bruke på å stoppe når farten er 90 km/h?

Oppgave 41 (1997–08–18: 75001 oppgave 1, 75011 oppgave 1)
Et flatestykke F i xy-planet er begrenset av koordinataksene og grafen til funksjonen

$$f(x) = 1 - \sin\frac{x}{2}, \qquad 0 \leq x \leq \pi.$$

a) Beregn arealet av F. Finn også volumet av rotasjonslegemet som dannes når F dreies 360° om den rette linjen $x = \pi$.

b) Linjen $x = a$ deler F i to deler med like store areal. Still opp en ligning for a, og bruk Newtons metode til å finne en tilnærmingsverdi for a med to riktige desimaler.

Oppgave 42 (1997–08–18: 75011 oppgave 7)
En bil med hull i bensintanken kjører med jevn fart fra Trondheim mot Røros. Antall liter bensin som pr. mil lekker ut av tanken er til enhver tid proporsjonal med bensinvolumet (målt i liter) i tanken. Proporsjonalitetskonstanten er k (mil)$^{-1}$. Motorens bensinforbruk regnes konstant og lik α liter/mil.

a) La $V(x)$ være bensinvolumet i tanken når bilen har kjørt x mil. Still opp en differensialligning som $V(x)$ tilfredsstiller, og finn generell løsning av ligningen.

b) Når $k = 0{,}1$ og $\alpha = 0{,}7$ kan en generell løsning av differensialligningen i **a)** skrives
$$V(x) = Ce^{-x/10} - 7.$$
Hvor langt kan en kjøre hvis det er 20 liter på tanken i starten? Fra Trondheim til Røros er det 15,5 mil. Hva er det minste antall liter på tanken ved start hvis bilen skal komme frem til Røros uten etterfylling?

Oppgave 43 (1993–12–08: 75011 oppgave 6)
Gitt en kurve i polarkoordinater
$$r = e^{a\theta}, \qquad \theta \in [0, 2\pi],$$
der a er en positiv konstant.

Finn lengden av kurven.

Oppgave 44 (1994–08–15: 75011 oppgave 1)
Bestem grenseverdien
$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt}{x^3}.$$

Oppgave 45 (1994–08–15: 75001 oppgave 2, 75011 oppgave 2)

a) Regn ut det ubestemte integralet
$$\int \frac{dx}{x(x^2-2x+2)}.$$

b) Finn et enklest mulig eksakt uttrykk for verdien av det uegentlige integralet
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(x^2-2x+2)}.$$

Oppgave 46 (1995–12–15: 75001 oppgave 5, 75011 oppgave 6)
Gitt integralet
$$I_0 = \int_1^2 e^{x^2/2}\,dx.$$

a) Bruk trapesmetoden til å beregne I_0 tilnærmet med en feil som i absoluttverdi er mindre enn 0,05.

b) Vis reduksjonsformelen

$$\int x^n e^{x^2/2}\,dx = x^{n-1}e^{x^2/2} - (n-1)\int x^{n-2}e^{x^2/2}\,dx.$$

Finn integralene

$$\int_1^2 x^4 e^{x^2/2}\,dx \qquad \text{og} \qquad \int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{x^2/2}\,dx$$

uttrykt ved I_0.

Oppgave 47 (1996–08–19: 75001 oppgave 2, 75011 oppgave 2)

a) Regn ut (metoden skal fremgå av besvarelsen) det ubestemte integralet

$$\int \frac{2}{(x+1)(1+x^2)}\,dx.$$

b) Finn den eksakte verdien av det uegentlige integralet

$$\int_1^\infty \frac{2}{(x+1)(1+x^2)}\,dx.$$

Oppgave 48 (1996–12–07: 75001 oppgave 1)

Regn ut (metoden skal fremgå av besvarelsen) det ubestemte integralet

$$\int \frac{2}{x(x^2+1)}\,dx.$$

Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x(x^2+1)}, \qquad y(1) = 1.$$

Oppgave 49 (1997–08–18: 75001 oppgave 2, 75011 oppgave 2)

Bruk substitusjonen $u = e^x$ til å bestemme den eksakte verdien av det uegentlige integralet

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+e^x+e^{-x}}\,dx.$$

Oppgave 50 (1993–12–08: 75011 oppgave 5)

Forskere har over flere år foretatt tellinger av en hvalart og har utfra tellingene lagt fram forslag til fangstkvoter. Dersom forslaget blir fulgt, vil hvalbestanden ved tidspunktet t etter fangststart endre seg med en rate som er proporsjonal med produktet av hvalbestanden $P(t)$ og $e^{-\alpha t}$ hvor α er en positiv konstant.

Skriv opp differensialligningen som hvalbestanden $P(t)$ oppfyller etter at fangsten har startet, og løs denne med initialbetingelsen $P(0) = P_0$.

Vis at når $t \to \infty$ nærmer bestanden seg en konstant.

Oppgave 51 (1993–12–08: 75001 oppgave 5)
Beregn buelengden til kurven

$$y = \tfrac{2}{3}x^{3/2}, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Finn også overflatearealet som fremkommer når kurven roteres om y-aksen.

Oppgave 52 (1994–08–15: 75011 oppgave 7)
La K være kurven med ligning

$$r = a\sqrt[n]{\sin\theta}, \quad 0 \le \theta \le \pi/2$$

i polarkoordinater. Her er a en positiv konstant og n er et positivt heltall. Når K dreies om y-aksen beskriver den en lukket flate som avgrenser et volum V_n.

Beregn V_n og bestem grenseverdien $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$.

Oppgave 53 (1994–12–16: 75011 oppgave 1)
En lukket kurve er gitt i polarkoordinater ved

$$r = 1 + 2\sin\theta, \qquad -\pi/6 \le \theta \le 7\pi/6.$$

Tegn en skisse av kurven. Regn ut arealet av det flatestykket som kurven omslutter.

Oppgave 54 (1996–12–07: 75011 oppgave 1)
En kurve K i xy-planet har parameterfremstilling

$$x = t^3, \quad y = 4 - t^2, \qquad 0 \le t \le 2.$$

Beregn arealet av området som begrenses av K og koordinataksene. Finn også buelengden til kurven K, svaret skal gis på eksakt form.

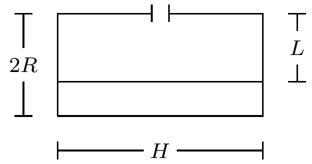
Oppgave 55 (1993–08–18: 75020 oppgave 1)

a) Bestem konvergensintervallet for rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\,x^n. \qquad (*)$$

b) Finn summen av rekken $(*)$ for alle x i konvergensintervallet.

Oppgave 56 (1993–12–08: 75001 oppgave 7, 75011 oppgave 7)



Ingvill har et sylindrisk parafinfat med radius R og høyde H. Anta at fatet ligger på siden på et horisontalt underlag. I denne posisjonen har fatet et hull på toppen. Hun ønsker å finne hvor mye parafin som er igjen på fatet ved å måle avstanden L ned til parafinoverflaten. La $V(L)$ betegne parafinvolumet.

a) Finn en formel for $V(L)$ for $0 \le L \le 2R$.

b) Finn Taylorpolynomet $P_1(L)$ av første orden (grad) for $V(L)$ i punktet $L = R$.

Oppgave 57 (1993–12–08: 75001 oppgave 6)

a) Undersøk om disse rekkene konvergerer eller divergerer:

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{1+n^2}, \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

b) Vis at potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(2n)!} x^n$$

er konvergent for alle x. La $f(x)$ betegne summen av rekken. Beregn $f(-1)$ med en feil som i absoluttverdi er mindre enn 0.005.

Oppgave 58 (1993–12–10: 75020 oppgave 1)

Gitt potensrekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$$

a) Finn konvergensradien R, og avgjør om rekken konvergerer for $x = \pm R$.

b) La $S(x)$ være summen av rekken for $|x| < R$, og la

$$S_N(x) = \sum_{n=2}^{N} \frac{x^n}{n \ln n} \qquad (N \geq 2).$$

Finn en N slik at $\left| S\left(-\frac{1}{2}\right) - S_N\left(-\frac{1}{2}\right) \right| < 10^{-3}$. Svaret skal begrunnes.

Oppgave 59 (1994–08–15: 75001 oppgave 6)

a) Vis ved induksjon at

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

for alle heltall $n \geq 1$.

b) Avgjør om rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$$

er absolutt konvergent, betinget konvergent eller divergent. Begrunn svaret.

Oppgave 60 (1994–08–15: 75001 oppgave 7)

La $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en følge slik at $a_n > 0$ for alle n og $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer. Avgjør om rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$$

konvergerer. Begrunn svarene.

Oppgave 61 (1994–08–19: 75020 oppgave 1)
Gitt potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!}\, x^n.$$

a) Vis at rekken konvergerer for alle x.

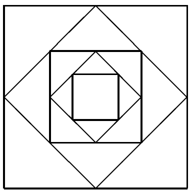
b) Finn et endelig uttrykk for summen av rekken.

Oppgave 62 (1994–12–14: 75020 oppgave 1)
Finn Taylorrekken om $x = 0$ til funksjonen

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Hvor mange ledd må vi ta med i Taylorrekken for å beregne $f(1)$ med feil mindre enn $0,0005$?

Oppgave 63 (1994–12–16: 75001 oppgave 6)



Figuren viser de første fem av en uendelig følge av kvadrater. Det ytterste kvadratet har sidekant a, og hvert av de øvrige kvadratene fremkommer ved å forbinde midtpunktene på sidene i kvadratet nærmest utenfor.
Finn summen av omkretsene av alle kvadratene.

Oppgave 64 (1994–12–16: 75001 oppgave 7)
Finn konvergensintervallet (husk å undersøke endepunktene) for potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+n} x^n.$$

Oppgave 65 (1994–12–16: 75001 oppgave 8)
Bruk potensrekken

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad \text{(gyldig for alle } x\text{)}$$

til å finne en tilnærmet verdi L for integralet

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\, dx$$

slik at $|\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\, dx - L| < 0.002$. Begrunn at den ønskede nøyaktighet er oppnådd.

Oppgave 66 (1995–08–22: 75020 oppgave 1)
Gitt potensrekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} x^n$$

a) Finn konvergensradien R, og avgjør om rekken konvergerer for $x = \pm R$.

b) La $S(x)$ være summen av rekken for $|x| < R$, og la for $N \geq 2$

$$S_N(x) = \sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^n}{\ln n} x^n.$$

Finn en N slik at $|S(\frac{1}{2}) - S_N(\frac{1}{2})| < 10^{-3}$. Svaret skal begrunnes.

Oppgave 67 (1995–08–26: 75001 oppgave 5, 75011 oppgave 5)

a) Vis at ligningen $\arctan x = x^2$ har minst én positiv løsning. Grunngi deretter at ligningen har nøyaktig én positiv løsning, c.

b) Skriv ned Taylorpolynomet omkring 0 av grad 3 for $f(x) = \arctan x$. Bruk dette til å finne en tilnærmet verdi av den positive løsningen c i (a).

c) Velg en x_0 og beregn tilnærmingsverdier x_1, x_2 og x_3 til c i (a) ved Newtons metode.

Oppgave 68 (1995–08–26: 75001 oppgave 6)

a) Bestem konvergensradien R for potensrekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)x^{2n} \qquad (*)$$

og undersøk om rekka er konvergent når $x = \pm R$.

b) Finn summen av rekka $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2}$ for $|x| < 1$. Bestem deretter summen av rekka $(*)$ for $|x| < R$.

Oppgave 69 (1995–08–26: 75001 oppgave 7)

Gi et eksempel på konvergente rekker $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ slik at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ divergerer. Er det mulig å finne et slikt eksempel dersom vi i tillegg forlanger at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolutt konvergent? (Begrunn svaret.)

Oppgave 70 (1995–12–15: 75001 oppgave 2)

En medisin utskilles fra kroppen med en hastighet som er gitt ved

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\ln 2}{12} x$$

der x er mengden av medisin i kroppen ved tiden t som måles i timer.

a) Anta at en dose x_0 av medisinen injiseres i kroppen ved tidspunktet $t = 0$. Finn mengden av medisin i kroppen ved et vilkårlig tidspunkt t. Hvor mange timer tar det før mengden av medisin i kroppen er halvert?

b) En pasient får en ny dose x_0 hver sjette time. Vis at den totale mengden medisin i kroppen rett etter den n-te injeksjonen er

$$x_0\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{(\sqrt{2})^2}+\cdots+\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}\right).$$

Mengden av medisin i kroppen bør ikke overskride en faregrense L. Hva er det største x_0 kan være når vi ønsker at faregrensen ikke overskrides uansett hvor lenge behandlingen fortsetter?

Oppgave 71 (1995–12–15: 75001 oppgave 6)
Undersøk om integralet

$$\int_1^\infty \arctan\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

er konvergent eller divergent.

Avgjør om rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$

er konvergent eller divergent.

Oppgave 72 (1995–12–15: 75001 oppgave 7)
Finn konvergensintervallet for potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Oppgave 73 (1995–12–18: 75020 oppgave 1)

a) Finn konvergensradien R for rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n(n+2)}x^{n+2}.$$

Avgjør om rekka konvergerer for $x=\pm R$.

b) La $f(x)$ være summen av rekka i a) for $|x|<R$. Finn et endelig uttrykk for $f(x)$.

c) La R_N være resten når vi tar med N ledd i rekka i a) for $x=-1$. Vis at

$$\ln\frac{N+3}{N+1}\le R_N\le \ln\frac{N+2}{N}.$$

Oppgave 74 (1996–08–12: 75020 oppgave 1)
Avgjør for hver av rekkene om den er absolutt konvergent, betinget konvergent eller divergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \tag{i}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(e^n + e^{-n})} \tag{ii}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2 + 1} \tag{iii}$$

Svarene skal begrunnes.

Oppgave 75 (1996–08–12: 75020 oppgave 2)
Benytt

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2}$$

til å finne potensrekken med sentrum i origo til $\arctan x$. Hva er konvergensradien til rekken? Svaret skal begrunnes.

Oppgave 76 (1996–08–19: 75001 oppgave 1)
Gitt potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}} x^n.$$

a) Finn konvergensradien R, og avgjør om rekken konvergerer for $x = \pm R$.

b) La S betegne summen av rekken for $x = 1/2$. Bruk alternerende rekkers restleddsestimat til å finne et positivt heltall N slik at

$$\left| S - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right| < 0{,}0005.$$

Oppgave 77 (1996–08–19: 75001 oppgave 7)
La tallfølgen $\{a_n\}$ være definert ved

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \quad \text{for } n \geq 1.$$

Vis ved induksjon at $a_n < 3$ for alle $n \geq 1$.

Gjør rede for at tallfølgen $\{a_n\}$ er konvergent, og bestem $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Oppgave 78 (1996–12–07: 75001 oppgave 6, 75011 oppgave 6)
Funksjonen f er definert ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \qquad x < 1. \tag{$*$}$$

a) Vis ved induksjon at

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}\, n!\,(1-x)^{(2n+1)/2}}, \qquad n = 1,\, 2,\, 3,\, \dots\ .$$

b) Taylors formel kan skrives som $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, der $P_n(x)$ er Taylor-polynomet om $x = a$ og $R_n(x)$ er restleddet. Skriv opp $P_3(x)$ og $R_3(x)$ for funksjonen $(*)$ med a = 0, og vis at

$$|f(x) - P_3(x)| < 5 \cdot 10^{-5} \quad \text{for } |x| < 0{,}1.$$

Hvor stor n måtte vi bruke dersom vi ønsket

$$|f(x) - P_n(x)| < 5 \cdot 10^{-7} \quad \text{for } |x| < 0{,}1?$$

Oppgave 79 (1996–12–07: 75001 oppgave 5)
Undersøk om følgende rekke konverger:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}. \qquad \left[\text{Vink: } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.\right]$$

Finn summen av følgende to rekker:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n!} \quad \text{og} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)!}. \qquad \left[\text{Vink: } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.\right]$$

Oppgave 80 (1996–12–07: 75001 oppgave 7)
Finn konvergensradien R til potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{2n}}{2n+1}$$

og avgjør om rekken konvergerer i endepunktene av konvergensintervallet.

Finn summen av rekken for $|x-1| < R$.

Oppgave 81 (1996–12–09: 75020 oppgave 3)
Avgjør for hver av rekkene om den er absolutt konvergent, betinget konvergent eller divergent.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!} \tag{i}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(\ln n)^2} \tag{ii}$$

Oppgave 82 (1997–08–18: 75001 oppgave 5)
Vis ved induksjon at

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

for alle hele tall $n \geq 1$. Hva er summen av den uendelige rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}\,?$$

Oppgave 83 (1997–08–18: 75001 oppgave 6)
Skriv opp Maclaurinrekkene (Taylorrekkene om $x = 0$) for funksjonene

$$f(x) = x - \sin x \quad \text{og} \quad g(x) = 1 - \cos x,$$

og bestem grenseverdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x - \sin x)^2}{(1 - \cos x)^3}.$$

Oppgave 84 (1997–08–18: 75001 oppgave 7)

a) Avgjør for hver av rekkene om den er absolutt konvergent, betinget konvergent eller divergent:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

b) Finn en uendelig geometrisk rekke

$$a_0 + a_0 r + a_0 r^2 + \cdots + a_0 r^n + \cdots$$

som har sum 2, og som er slik at hvert ledd er fire ganger summen av alle de etterfølgende leddene.

Oppgave 85 (1997–12–08: 75020 oppgave 1)

a) Bestem konvergensradiusen R til potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Undersøk spesielt konvergens i endepunktene.

b) Finn et endelig uttrykk for summen av potensrekken i a) når $|x| < R$.

c) Sett $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+1}$

Vis at $S_N > \frac{1}{2} \ln(2N + 3)$

Oppgave 86 (1998–08–07: 75020 oppgave 1)
Vis ved hjelp av integralkriteriet eller på annen måte at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

konvergerer.

La S være summen av rekken og S_n summen av de n første leddene. Finn en øvre skranke for $|S - S_n|$. Hvor stor n må vi bruke for at vi ut fra denne skranken skal kunne slutte at $|S - S_n| < \frac{1}{100}$?

Oppgave 87 (1997–12–10: SIF5003 oppgave 2)
I Postens informasjon for A-post innenlands finner vi at maksimumsmålene for sendinger i form av en rull er "Lengde + dobbelt tverrmål = 104 cm, lengde høyst 90 cm". Med rull forstås en sylinder med sirkulært tverrsnitt, og tverrmålet er diameteren. Vi ønsker å sende en rull med størst mulig volum. Hva blir lengden og hva blir tverrmålet?

Oppgave 88 (1997–12–10: SIF5003 oppgave 3)

a) Bruk trapesmetoden med $n = 4$ delintervaller til å finne en tilnærmet verdi for integralet

$$\int_0^{\pi/3} e^{\sin\theta}\, d\theta.$$

b) La $f(\theta) = e^{\sin\theta}$ være integranden i **a)**. Vis at $|f''(\theta)| < 1.5$ når $0 \le \theta \le \pi/3$, og bruk dette til å vurdere feilen ved tilnærmingen i **a)**. Hvor mange delintervaller ville du bruke i **a)** for å være sikker på at feilen ble mindre enn 10^{-4}?

Oppgave 89 (1997–12–10: SIF5003 oppgave 4)
La funksjonen F være definert for $x \ge 1$ ved

$$F(x) = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1}\, dt,$$

og la K være kurven $y = F(x)$ for $1 \le x \le 2$. Finn buelengden av K. Bestem også arealet av rotasjonsflata som fremkommer når K dreies om den rette linje $x = 1$.

Oppgave 90 (1997–12–10: SIF5003 oppgave 5)
Frysepunktet T for saltvann er en funksjon av ionekonsentrasjonen x, og teoretiske betraktninger gir at T tilfredsstiller differensialligningen

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{aT^2}{1+bx} \tag{$*$}$$

hvor a og b er positive konstanter. Bruk verdiene $a = 2.49 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}\mathrm{M}^{-1}$ (K = kelvin, M = molar = enhet for konsentrasjon) og $b = 0.018\ \mathrm{M}^{-1}$ når det spørres etter tallsvar i denne oppgaven.

a) Finn ligningen for tangenten til grafen til T (som funksjon av x) gjennom punktet $(0, T_0)$ ved hjelp av differensialligningen $(*)$. Sett $T_0 = 273.15$ K, og bruk tangentligningen til å finne en tilnærmet verdi for $T(x)$ i Barentshavet hvor $x = 1.2$ M.

b) Løs differensialligningen $(*)$ under initialbetingelsen $T(0) = T_0$ (for vilkårlig a, b og T_0). Sett igjen $T_0 = 273.15$ K og sammenlign den verdien du nå finner for $T(1.2)$ med den tilnærmete verdien du fant i **a)**.

Oppgave 91 (1997–12–10: SIF5003 oppgave 6)
Finn ligningen for tangenten til kurven

$$x^3y + xy^5 = 2 \tag{3}$$

i punktet $(1, 1)$. Ligningen (3) definerer implisitt en funksjon $y = f(x)$ i nærheten av $x = 1$ med $f(1) = 1$. Finn Taylorpolynomet av grad 2 for $f(x)$ om $x = 1$.

Oppgave 92 (1997–12–10: SIF5003 oppgave 7)
Bestem grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty} n(\pi - 2\arctan n),$$

og avgjør om den uendelige rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\pi - 2\arctan n)$$

er konvergent eller divergent.

Oppgave 93 (1997–12–10: SIF5003 oppgave 8)
Bestem konvergensintervallet for potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n,$$

og finn et endelig uttrykk for summen i konvergensintervallet.

Oppgave 94 (1998–08–03: SIF5003 oppgave 1)
Bestem grenseverdiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{x-\sin x} \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right).$$

Oppgave 95 (1998–08–03: SIF5003 oppgave 2)
Avgjør om rekkene konvergerer eller divergerer:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Oppgave 96 (1998–08–03: SIF5003 oppgave 3)

a) La a og b være gitte konstanter, $a > b > 0$. Undersøk om funksjonen

$$f(x) = \arctan\frac{a}{x} - \arctan\frac{b}{x}, \qquad 0 < x < \infty$$

har noen største og/eller noen minste verdi, og finn eventuelt disse/denne.

b) Gitt punktene $A(0,4)$, $B(0,1)$ og $C(x,0)$ der $x > 0$. Bestem x slik at vinkelen

$$u = \angle ACB$$

blir størst mulig. Hva blir den maksimale verdien for u?

Oppgave 97 (1998–08–03: SIF5003 oppgave 4)

La K være grafen til ligningen

$$x^2y^3 + (y+1)e^{-x} = x + 2.$$

a) Finn dy/dx i punktet $(0,1)$? Finn ligningen for tangenten til K i punktet $(0,1)$ og bestem tangentens skjæringspunkt med x-aksen.

b) Gjør rede for at K har nøyaktig ett skjæringspunkt med x-aksen. Bruk Newtons metode til å finne x-koordinaten til dette skjæringspunktet med 2 riktige desimaler.

Oppgave 98 (1998–08–03: SIF5003 oppgave 5)

En vanntank fremkommer ved at kurven $y = x^2$, $0 \le x \le 2$, dreies om y-aksen. Både x og y måles i meter (m).

a) Anta at tanken er fylt med vann til en høyde av h (m). Vis at da er volumet (m^3) av vannet i tanken gitt ved:

$$V = V(h) = \frac{\pi h^2}{2}.$$

b) Vi tenker oss nå at tanken er tom, og fylling av tanken med vann begynner. Vannet renner inn i tanken med konstant volum 1 (m^3) pr. tidsenhet (time). Hvor fort stiger vannhøyden i det øyeblikket vannhøyden i tanken er 1 (m)?

c) Fyllingen av tanken stopper når vannhøyden er blitt 2 (m). Tanken skal nå tømmes for vann gjennom et lite hull i bunnen av tanken. Vi antar at vannet som renner ut av tanken pr. tidsenhet hele tiden er proporsjonal med kvadratroten av vannhøyden.

Vis at vannhøyden $h = h(t)$ tilfredsstiller differensialligningen

$$\sqrt{h}\,\frac{dh}{dt} = -k, \qquad \text{der } k \text{ er en positiv konstant.}$$

d) Når tømmingen har pågått i 3 timer er vannhøyden i tanken 1 (m). Løs differensialligningen i **c)**, og finn et uttrykk for $h(t)$. Hvor lang tid tar det før tanken er tom?

Oppgave 99 (1998–08–03: SIF5003 oppgave 6)

a) Gjør rede for at hvis $|u| < 1$ så er

$$\int_0^u \frac{1}{1+x^9}\,dx = u - \frac{u^{10}}{10} + \frac{u^{19}}{19} - \frac{u^{28}}{28} + \cdots + (-1)^n \frac{u^{9n+1}}{9n+1} + \cdots .$$

b) Bruk resultatet i **a)** til å vise at verdien av integralet

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^9}\,dx$$

ligger mellom 0,4999 og 0,5000.

Fasit

Oppgave 1		$x \in (-1, -\frac{3}{4}) \cup (-\frac{1}{4}, 0)$
Oppgave 2	**a)**	1/3
	b)	$(-1)^{n+1}/(2n)$ for $B = 2n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; 0 ellers
Oppgave 3		(i) 1/2, (ii) 5/2 ($k = 3$)
Oppgave 4		$y = -2\pi x + 3\pi$
Oppgave 5		0,03 cm/s
Oppgave 6		$4L/(4 + 3\sqrt{3})$ til kvadratet
Oppgave 7		$x \approx 0{,}8655$
Oppgave 8		$x = (\sqrt{2} - 1)\pi$, $y = 4\sqrt{2}$
Oppgave 9	**a)**	$1 < \alpha < e/(e-1)$
	b)	F.eks. $x_0 = 300$, $x_1 = 604{,}2$, $x_2 = 638{,}6$ ($r = 638{,}98$)
Oppgave 10		$1/(50\pi)$ (cm/min), 8/5 (cm^2/min)
Oppgave 11		Bilens fart er 91,9 km/h
Oppgave 12	**a)**	$\frac{1}{2}(e^{v_0} - e^{-v_0}) - 1/v_0^2 = 0$
	b)	0,95
Oppgave 13	**a)**	$-0{,}06\pi$ cm^2/s

b) $\beta < \alpha < 4\beta$; $\quad t_1 = \dfrac{\ln(4\beta/\alpha)}{2(\alpha-\beta)}$; $\quad t_2 = \dfrac{\ln 2}{\alpha - \beta}$

Oppgave 15
a) 14 m/s når $x = 80\,\mathrm{m}$; $dv/dt = (\frac{7}{40})^2(80 - x)$
b) $\frac{40}{7}(\pi/2 + \arcsin\frac{1}{4}) \approx 10{,}42\,\mathrm{s}$

Oppgave 16 $|BZ| = a(\sqrt{2} - 1)$

Oppgave 17 $-\pi/2$

Oppgave 21 $\dfrac{1}{(2+x)\ln(2+x)}, \quad \ln\left(\dfrac{\ln 3}{\ln 2}\right)$

Oppgave 22
a) $\frac{73}{6}\pi$
b) $\pi(28 + 3\sqrt{2} - \frac{5}{6}\sqrt{5} + \frac{17}{6}\sqrt{17})$

Oppgave 23 6 timer og 20 minutter; $\frac{10}{3}\ln 20\,\mathrm{km} \approx 10\,\mathrm{km}$

Oppgave 24 $L \approx 8{,}74$

Oppgave 25 $y = (4 - e^{3\arctan(x+1)})/(2 + e^{3\arctan(x+1)})$

Oppgave 26
a) $v = b$

Oppgave 27
a) $1/3$
b) $y = \sqrt{3 - 2/x}$

Oppgave 28 $2\sqrt{2}/\pi$ (dm/min)

Oppgave 29 $y^2 = -1 + Ce^{\sqrt{1+x^3}}, \quad y = -\sqrt{-1 + 2e^{\sqrt{1+x^3}-1}}$

Oppgave 30
a) $\rho = \rho_0 e^{(h/100)\ln(\rho_1/\rho_0)} = \rho_0(\rho_1/\rho_0)^{h/100}$
b) $M = 4\pi\rho_0 \int_0^{100}(r_0 + h)^2(\rho_1/\rho_0)^{h/100}\,dh$

Oppgave 31
a) $\left(\frac{3}{2}x + 1\right)^{2/3} - 1$
b) $\frac{4}{3}\left(4 - \sqrt{2}\right)$

Oppgave 32 $\ln(\sqrt{2} + 1)$

Oppgave 33
a) $(0, 3/4)$
b) $r = \sqrt{3/8}, \quad h = 3/8, \quad V = 9\pi/64$

Oppgave 34
a) $V = \frac{7}{6}A_0 H, \quad A_0\left[\dfrac{1}{\sqrt{h}} + \dfrac{\sqrt{h}}{H} - \dfrac{h\sqrt{h}}{H^2}\right]\dfrac{dh}{dt} + k = 0$

	b)	$\frac{544}{287}T$
Oppgave 35	**a)**	$h, \quad \pi a^2 h + \frac{1}{2}\pi h + 4ah$
	b)	$1/\sqrt{2}, \quad \pi\sqrt{2} + 4$
Oppgave 36		$dT/dt = k(T - 20), \quad T(t) = 5e^{kt} + 20, \quad 3\ln 5/\ln(\frac{5}{2})$
Oppgave 37		$\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$
Oppgave 38		$dy/dt = ky(P - y); \quad y = 2^t P/(4 + 2^t); \quad 4$ uker
Oppgave 39	**b)**	1,09
Oppgave 40		105 m
Oppgave 41	**a)**	$\pi - 2; \quad \pi(8 + \pi^2 - 4\pi)$
	b)	0,69
Oppgave 42	**a)**	$V'(x) = -kV(x) - \alpha; \quad V(x) = Ce^{-kx} - \alpha/k$
	b)	$10\ln\frac{27}{7} \approx 13{,}5$ mil; $\quad 7e^{1{,}55} - 7 \approx 26{,}0$ L
Oppgave 43		$\sqrt{1 + 1/a^2}(e^{2\pi a} - 1)$
Oppgave 44		$1/3$
Oppgave 45	**a)**	$\frac{1}{4}\ln\big(x^2/(x^2 - 2x + 2)\big) + \frac{1}{2}\arctan(x-1) + C$
	b)	$\pi/4$
Oppgave 46	**a)**	$3{,}55 \pm 0{,}05$
	b)	$3I_0 + 2e^2 + 2\sqrt{e}, \quad I_0 - \frac{1}{2}e^2 + \sqrt{e}$
Oppgave 47	**a)**	$\ln\lvert x+1\rvert - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + C$
	b)	$\pi/4 - \frac{1}{2}\ln 2$
Oppgave 48		$\ln\dfrac{x^2}{x^2+1} + C; \quad \dfrac{2x^2}{x^2+1}$
Oppgave 49		$\pi/(3\sqrt{3})$
Oppgave 50		$dP/dt = ke^{-\alpha t}P; \quad P(t) = P_0 e^{(k/\alpha)(1 - e^{-\alpha t})}$
Oppgave 51		$\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1); \quad \frac{8}{15}\pi(\sqrt{2} + 1)$

Oppgave 52 $\dfrac{2}{3}\dfrac{n}{n+3}\pi a^2$; $\frac{2}{3}\pi a^2$

Oppgave 53 $2\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3}$

Oppgave 54 $64/5$; $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$

Oppgave 55 **a)** $(-1, 1)$
b) $x^2/(1-x)^2$ for $-1 < x < 1$

Oppgave 56 **a)** $V(L) = H\big[(R-L)\sqrt{2RL - L^2} + R^2 \arcsin\big((R-L)/R\big) + \frac{1}{2}\pi R^2\big]$
b) $P_1(L) = \frac{1}{2}\pi R^2 H - 2RH(L-R)$

Oppgave 57 **a)** (i) konvergent; (ii) divergent
b) $f(-1) \approx -0{,}4411$

Oppgave 58 **a)** $R = 1$, konvergent for $x = -1$, divergent for $x = 1$
b) $N = 6$ (f.eks.)

Oppgave 61 **b)** $(x^2 + x)e^x$

Oppgave 62 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,n!}\,x^{2n+1}$ (konvergent for alle x); seks ledd

Oppgave 63 $4(2 + \sqrt{2})a$

Oppgave 64 $[-1, 1)$

Oppgave 65 0,7951

Oppgave 66 **a)** $R = 1$, konvergent for $x = 1$, divergent for $x = -1$
b) $N = 8$

Oppgave 67 **b)** $P_3(x) = x - \frac{1}{3}x^3$, $c \approx 0{,}7913$
c) F.eks. $x_0 = 0{,}7913$, $x_1 = 0,8360$, $x_2 = 0{,}8336$, $x_3 = 0{,}8336$

Oppgave 68 **a)** $R = 1$; divergent for $x = \pm 1$
b) $\dfrac{x^2}{1-x^2}$ for $|x| < 1$; $\dfrac{2}{(1-x^2)^2}$ for $|x| < 1$

Oppgave 69 F.eks. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$; nei

Oppgave 70 **a)** $x_0 e^{-t(\ln 2)/12}$, 12 timer
b) $x_0 \le (1 - 1/\sqrt{2})L$

Oppgave 71 Begge divergente

Oppgave 72 $[-1, 1)$

Oppgave 73 **a)** $R = 1$, konvergens for $x = \pm 1$
b) $f(x) = -x + \frac{1}{2}x^2 + (1 - x^2)\ln(1 + x)$

Oppgave 74 (i) og (ii) betinget konvergent, (iii) absolutt konvergent

Oppgave 75 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; \qquad R = 1$

Oppgave 76 **a)** $R = 1$, konvergent for $x = 1$, divergent for $x = -1$
b) $N = 8$

Oppgave 77 $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$

Oppgave 78 **b)** $P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3$

$$R_3(x) = \frac{35}{128}\frac{x^4}{(1-z)^{9/2}} \quad (z \text{ mellom } 0 \text{ og } x); \qquad n = 5$$

Oppgave 79 Rekken konvergerer; $3e$; $e - \frac{5}{2}$

Oppgave 80 $R = 1$; konvergens for $|x - 1| = 1$

$$\frac{\arctan(x-1)}{x-1} \text{ for } |x-1| < 1,\ x \neq 1; \quad 1 \text{ for } x = 1$$

Oppgave 81 (i) og (ii) absolutt konvergent

Oppgave 82 1

Oppgave 83

$$f(x) = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$g(x) = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

2/9

Oppgave 84 **a)** (i) er betinget konvergent; (ii) er absolutt konvergent
b) $a_0 = \frac{8}{5}$; $r = \frac{1}{5}$

Oppgave 85

a) $R = 1$, rekken er konvergent for $x \in \langle -1, 1 \rangle$

b) $\dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$

Oppgave 86

$|S - S_n| < \pi/2 - \arctan n$; $n \geq 100$

Oppgave 87

$L = D = \frac{104}{3}\,\text{cm}$

Oppgave 88

a) 1,7438

b) maksimal feil 0,0090; $n \geq 38$

Oppgave 89

$\frac{8}{5}\sqrt{2} - \frac{2}{5}$; $\frac{8}{35}\pi\big(6\sqrt{2} + 1\big)$

Oppgave 90

a) $y = T_0 - aT_0^2 x$; $T(1{,}2) \approx 270{,}92\,\text{K}$

b) $T(x) = \dfrac{bT_0}{aT_0 \ln(1 + bx) + b}$; $T(1{,}2) = 270{,}96\,\text{K}$

Oppgave 91

$2x + 3y = 5$; $1 - \frac{2}{3}(x-1) - \frac{19}{54}(x-1)^2$

Oppgave 92

2; divergent

Oppgave 93

$(-1, 1)$; $\dfrac{x}{(1-x)^2}$

Oppgave 94

6; 3

Oppgave 95

begge rekkene konvergerer

Oppgave 96

a) største verdi: $\arctan \sqrt{a/b} - \arctan \sqrt{b/a}$
ingen minste verdi

b) 2; $\arctan 2 - \arctan \frac{1}{2} \approx 36{,}87°$

Oppgave 97

a) 3; $y = 3x + 1$; $-\frac{1}{3}$

b) $-0{,}44$

Oppgave 98

b) $\dfrac{1}{\pi}$ m/h

d) $\big(2\sqrt{2} - \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)t\big)^{2/3}$; $\dfrac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 1}\,\text{h} = \frac{6}{7}(4 + \sqrt{2})\,\text{h} \approx 4{,}64\,\text{h}$

Oversikt over enkelteksamener

For hver eksamen er listet oppgavenumrene i dette heftet som eksamen besto av. Hvis en eksamensoppgave ikke er med her (fordi den faller utenom pensum i SIF5003), er oppgavenummeret erstattet med en strek. For eksempel har oppgave 6 fra vintereksamen 1996 i 75011 nummeret 78 i denne samlingen.

1993–08–18	75020: 55
1993–08–23	75011: –, 1, 4, 22, 23, 24
1993–12–08	75001: 2, 18, 16, 25, 51, 57, 56 75011: 2, 18, 16, –, 50, 43, 56
1993–12–10	75020: 58
1994–08–15	75001: 27, 45, 5, 6, 7, 59, 60 75011: 44, 45, 5, 6, 7, 26, 52
1994–08–19	75020: 61
1994–12–14	75020: 62
1994–12–16	75001: 31, 28, 19, 8, 9, 63, 64, 65 75011: 53, 28, 19, 8, 9, 29, 30
1995–08–22	75020: 66
1995–08–26	75001: 32, 10, 20, 33, 67, 68, 69 75011: 32, –, 20, 33, 67, 34
1995–12–15	75001: 3, 70, 35, 21, 46, 71, 72 75011: 3, –, –, 35, 21, 46, 36, –
1995–12–18	75020: 73
1996–08–12	75020: 74, 75
1996–08–19	75001: 76, 47, 11, 12, 17, 37, 77 75011: –, 47, 11, 12, 17, 37, –
1996–12–07	75001: 48, 40, 39, 13, 79, 78, 80 75011: 54, 38, 39, 13, –, 78, –
1997–08–18	75001: 41, 49, 14, 15, 82, 83, 84 75011: 41, 49, 14, 15, –, –, 42
1997–12–08	75020: 85
1997–12–10	SIF5003: –, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93
1998–08–03	SIF5003: 94, 95, 96, 97, 98, 99
1998–08–07	75020: 86