Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4100 Matematikk1
Haust 2009

Løsningsforslag — Øving 1

$\boxed{1.5.59}$ **a)** Vi skal invertere $f(x) = \frac{100}{1+2^{-x}}$, dvs. løse ligningen mhp. x. Skriver $y = f(x)$:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{100}{1+2^{-x}} \\
y(1+2^{-x}) &= 100 \\
2^{-x} &= \frac{100}{y} - 1 = \frac{100-y}{y} \\
-x\ln 2 &= \ln \frac{100-y}{y} \\
x &= \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{y}{100-y}
\end{aligned}
$$

dette betyr at

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{x}{100-x}.$$

Vi sjekker svaret:

$$
\begin{aligned}
(f \circ f^{-1})(x) &= \frac{100}{1 + 2^{-\frac{1}{\ln 2} \ln \frac{x}{100-x}}} \\
&= \frac{100}{1 + e^{-\ln 2 \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{x}{100-x}}} \\
&= \frac{100}{1 + e^{-\ln \frac{x}{100-x}}} \\
&= \frac{100}{1 + \frac{100-x}{x}} = \frac{100x}{x + 100 - x} = x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f^{-1} \circ f)(x) &= \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{\frac{100}{1+2^{-x}}}{100 - \frac{100}{1+2^{-x}}} \\
&= \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{100}{100(1+2^{-x}) - 100} \\
&= \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{1}{2^{-x}} = -(-x\ln 2)/\ln 2 = x
\end{aligned}
$$

b) Nøyaktig samme utregningen som i a) gir

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln 1.1} \ln \frac{x}{50-x}.$$

$\boxed{1.5.62}$ **a)** Legges renten til en gang i året vil en sum y_0 etter n år med $p\%$ rente gi

$$y(n) = y_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Antall år N før summen dobles er gitt ved ligningen

$$2y_0 = y_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^N,$$

som i tur gir at

$$N = \frac{\ln(2)}{\ln(1 + p/100)}.$$

Merk at startsummen er irrelevant. Satt inn med data fra oppgaven gir dette at

$$N = \frac{\ln(2)}{\ln(1.0475)} = 14.93$$

Rentene legges til hvert år, så vi må vente 15 år før summen faktisk har doblet seg.

$\boxed{2.1.4}$ **a)** Gjennomsnittlig variasjon til funksjonen $f(t) = 2 + \cos t$ over $[0, \pi]$ er

$$\frac{2 + \cos\pi - (2 + \cos 0)}{\pi - 0} = \frac{2 - 1 - (2 + 1))}{\pi} = -\frac{2}{\pi}$$

b) $f(-\pi) = f(\pi)$, så gjennomsnittlig variasjon over intervallet $[-\pi, \pi]$ blir null.

$\boxed{2.1.15}$ En sekant i x har stigningstall

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x+h)^3 - 12(x+h) - (x^3 - 12x)}{h} \\ &= \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - 12x - 12h - (x^3 - 12x)}{h} \\ &= 3x^2 + 3hx + h^2 - 12\end{aligned}$$

Lar vi $h \to 0$ får vi stigningstall

$$3x^2 - 12$$

I punktet P er $x = 1$, dvs vi har stigningstall $= -9$. En linje som går gjennom punktet P med stigningstall -9 er på formen

$$y - (-11) = -9(x - 1)$$

$\boxed{2.2.18}$ Ingen hokus-pokus:

$$\lim_{x\to 5} \frac{4}{x - 7} = \frac{4}{5 - 7} = -2$$

$\boxed{2.2.68}$ $\lim_{x\to 0} 2 - x^2 = 2$. $\lim_{x\to 0} 2\cos x = 2\cos 0 = 2$. Øvre og nedre grense for $g(x)$ har samme verdi i $x = 0$, derfor må $g(x)$ også ha denne grensen iflg. skviseteoremet:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 2$$

$\boxed{2.3.19}$ Med $\varepsilon = 1$ krever vi at

$$|\sqrt{19-x} - 3| < 1$$

Vi deler absoluttverdien i to deler og får

$$\sqrt{19-x} - 3 < 1,$$

og

$$\sqrt{19-x} - 3 > -1.$$

Løser vi disse to ulikhetene får vi

$$x > 3,$$

og

$$x < 15.$$

Begge disse må gjelde, dvs. for $x \in [3, 15]$ holder $|f(x) - L| < \varepsilon$. Med $x_0 = 10$ ser vi ulikheten holder for $|x_0 - x| < \delta$ med $\delta = 5$.

$\boxed{2.3.42}$ Vi skal bevise at

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 4,$$

hvor

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases}$$

Dersom dette stemmer skal det ifølge definisjonen på side 75 gjelde at for alle $\epsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ slik at for alle x som oppfyller $|x - (-2)| < \delta$ så er $|f(x) - 4| < \epsilon$. Vi følger fremgangsmåten på side 78. Først løser vi $|f(x) - 4| < \epsilon$ for $x \neq -2$.

$$\begin{gathered} |f(x) - 4| < \epsilon \\ \Downarrow \\ -\epsilon < f(x) - 4 < \epsilon \\ \Downarrow \\ 4 - \epsilon < f(x) < 4 + \epsilon \end{gathered}$$

Siden $x \neq -2$ er $f(x) = x^2$ så

$$4 - \epsilon < x^2 < 4 + \epsilon.$$

Ved å ta kvadrat-rot får man $+\sqrt{4-\epsilon} < x < +\sqrt{4+\epsilon}$ eller $-\sqrt{4-\epsilon} > x > -\sqrt{4+\epsilon}$. Siden vi er interesert i løsningen nær $x_0 = -2 (< 0)$ er intervallet vi ønsker gitt ved $-\sqrt{4-\epsilon} > x > -\sqrt{4+\epsilon}$. En δ som oppfyller kravet i definisjonen på side 75 er da gitt ved;

$$\delta = \min\big(-\sqrt{4-\epsilon} - (-2), -2 - (-\sqrt{4+\epsilon})\big).$$

$\boxed{2.3.49}$ Her kan vi bruke skviseloven. Vi vet at $|\sin x| \leq 1$ for alle x, derfor vil

$$-|x| < x \sin \frac{1}{x} < |x|$$

Når $x \to 0$ vil både $|x|$ og $-|x|$ gå mot null, altså vil også $x \sin \frac{1}{x}$ ha grense null.

2.4.4 **a)** $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x/2 = 1$
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(3-x) = 1$
$f(2) = 2$

b) Grensen $\lim_{x\to 2} f(x)$ eksisterer, både den høyre og den venstre grensen eksisterer og de er like. Grensen er 1.

c) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(3-x) = 4$
$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(3-x) = 4$

d) Samme som i b), grensen er 4.

2.4.13 Funksjonen oppfører seg fint, så her er det bare å sette inn:

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x}{x+1}\frac{2x+5}{x^2+x} = \frac{2}{2+1}\frac{2\cdot 2+5}{2^2+2} = 1$$

2.4.50 Merk at både e^{-x} og $\sin 1/x$ går mot null når $x\to\infty$. Deler på x^2 oppe og nede, og vi kan da skrive

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+e^{-x}}{\sin(1/x)-2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+e^{-x}/x^2}{\sin(1/x)/x^2-2} = \frac{3+0}{0-2} = -\frac{3}{2}.$$

2.5.26 **a)**

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}}$$

For $x > 0$ nær null er det første leddet positivt og veldig stort. I grensen blir det da $+\infty$.

b)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}}$$

For $x < 0$ nær null er det første leddet negativt og veldig stort i absoluttverdi. I grensen blir det da $-\infty$.

c)

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}}$$

For $x > 1$ nær 1 er det andre leddet negativt og veldig stort i absoluttverdi. I grensen blir det da $-\infty$.

d)

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}}$$

For $x < 1$ nær 1 er det andre leddet negativt og veldig stort i absoluttverdi. I grensen blir det da $-\infty$.

$\boxed{\text{2.5.35}}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$$

Grafen har en vertikal asymptote ved $x = 1$. Gjør vi polynomdivisjonen får vi at

$$\frac{x^2 - 4}{x - 1} = x + 1 - \frac{3}{x - 1},$$

dvs. at for store $|x|$ vil $f(x)$ oppføre seg som $x + 1$(skrå asymptote).

$\boxed{\text{2.6.8}}$ f er kontinuerlig i følgende intervall x: $[-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ og $(2, 3)$. f er diskontinuerlig i $x = 0, 2$ og 3 siden $f(x)$ ikke er definert for disse verdiene. f er diskontinuerlig i $x = 1$ siden $\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \neq 1 = f(1)$.