Fasit, gruppeøving 3.

2.3.9. Fra figuren ser vi at hvis $9/16 \leq x \leq 25/16$, så er $f(x)$ garantert ikke lenger en $1/4$ unna verdien $1 = f(x_0)$. Avstanden fra $x_0 = 1$ til $9/16$ og $25/16$ er hhv. $7/16$ og $9/16$. Den minste av disse kan da brukes som δ, så vi får svaret $\underline{\underline{\delta = 7/16}}$. (Alle $\delta > 0$ mindre enn $7/16$ vil selvsagt også fungere!)

2.3.16. Ulikheten $|f(x) - L| < \varepsilon$ blir her $|(2x-2) - (-6)| < 0.02$, dvs.

$$\begin{aligned} |2x+4| < 0.02 &\iff -0.02 < 2x + 4 < 0.02 \\ &\iff 3.98 < 2x < 4.02 \iff 1.99 < x < 2.01. \end{aligned}$$

Intervallet det spørres etter er derfor $\underline{\underline{(1.99, 2.01)}}$. Dette er sentrert i $x_0 = 2$, så δ blir rett og slett avstanden fra x_0 til endepunktene i intervallet, dvs. $\underline{\underline{\delta = 0.01}}$.

2.3.56. Med $V = 120$ volt har vi

$$I = I(R) = \frac{120}{R}.$$

Den ideelle, etterspurte verdien av I er 5 ampere, som oppnås med $R = 120/5 = 24$ ohm. Men det tillates altså et avvik på opptil $\varepsilon = 0.1$ ampere fra den ideelle verdien, dvs.

$$|I(R) - 5| < 0.1.$$

Vi løser dette:

$$-0.1 < \frac{120}{R} - 5 < 0.1 \iff 4.9 < \frac{120}{R} < 5.1 \iff \frac{120}{5.1} < R < \frac{120}{4.9}$$

eller tilnærmet $\underline{\underline{23.53 < R < 24.48}}$.

2.4.1. (a) sant. (b) sant. (c) usant. (d) sant. (e) sant. (f) sant. (g) usant. (h) usant. (i) usant. (j) usant. (k) sant. (l) usant.

2.4.5. (a) Nei, fordi $f(x)$ ikke nærmer seg noen grense når x går mot 0 fra høyre ($f(x)$ svinger mellom -1 og 1, fortere og fortere etterhvert som vi nærmer oss $x = 0$).

(b) Ja. Er lik 0.

(c) Nei. Se begrunnelsen for (a).

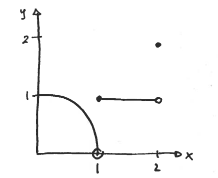
2.4.6. (a) Ja. Er lik 0.

(b) Nei. Funksjonen er ikke definert for $x < 0$.

(c) Nei. Samme begrunnelse som (b).

Fasit, gruppeøving 4.

2.4.9. (a) Definisjonsmengde $0 \leq x \leq 2$. Verdimengde $0 < y \leq 1$ og $y = 2$. (b) Alle x i $(0, 1)$ og $(1, 2)$. (c) $x = 2$ (b) $x = 0$



2.4.52. Vi deler med x^3 i både teller og nevner (for $x \neq 0$), og får da

$$f(x) = \frac{2 + (7/x^3)}{1 - (1/x) + (1/x^2) + (7/x^3)}$$

Alle leddene i parentes går mot null når $x \to \pm\infty$, så vi ser at grenseverdien blir $\dfrac{2}{1} = 2$ både når $x \to \infty$ og når $x \to -\infty$.

2.5.17. Her kan det være nyttig å først skissere grafen til $x^2 - 4$. (Standarparabel forskjøvet 4 enheter ned).

(a) Når vi nærmer oss $x = 2$ fra høyre, så er $x^2 - 4$ negativ, og nærmer seg null. Derfor blir $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$.

Vi resonnerer tilsvarende i de andre tilfellene, og får: (b) $-\infty$. (c) $-\infty$. (d) $+\infty$.

2.5.21. (a) når $x \to 0^+$, så går telleren mot 2, mens nevneren $x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2)$ er negativ og går mot null. Derfor blir grensen $-\infty$.

(b), (c) og (d): Både teller og nevner går mot null, så vi prøver først å forkorte bort faktoren $x - 2$. Telleren er $x^2 - 3x + 2$, som har røtter $x = 1$ og $x = 2$. Det gir oss $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, og derfor er

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{x^2(x - 2)} = \frac{x - 1}{x^2} \qquad (x \neq 2,\ x \neq 0).$$

Vi ser derfor at (den tosidige) grenseverdien i $x = 2$ er $\dfrac{2-1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$, som er svaret på (d), og følgelig også på (b) og (c).

(e) Argumentet i (a) gjelder uansett om vi nærmer oss $x = 0$ fra venstre eller høyre, og viser derfor at grenseverdien i $x = 0$ er $-\infty$.

2.5.31. Horisontale asymptoter: $y = \dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{1 + 3/x}{1 + 1/x} \to 1$ når $x \to \pm\infty$. Vertikal asymptote i $x = -1$: $y \to -\infty$ når $x \to -1^-$ og $y \to +\infty$ når $x \to -1^+$.