TMA4100: Repetisjon før midtsemesterprøven 10.10.09

Lars Sydnes
sydnes@math.ntnu.no

Institutt for matematiske fag

October 1, 2009

Kapittel 1: Funksjoner.

Allmenne begrep

- Funksjon f
- Graf $y = f(x)$
- Definisjonsområde
- Verdimengde
- Invers funksjon
- Sammensatt funksjon
- Algebraiske sammensetninger av funksjoner
- Manipulering av grafer: Forskyvning/skalering

Kapittel 1: Funksjoner.

Spesielle klasser

- Lineære funksjoner $f(x) = ax + b$
- Polynomfunksjoner $f(x) = P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$
- Rasjonale funksjoner $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
- Algebraiske funksjoner $f(x) = \sqrt{x + x^2} - \sqrt{1 - \sqrt{x}}$
- Trancendentale funksjoner
  - Trigonometriske funksjoner $\sin, \cos, \tan, \ldots$
  - Hyperbolske funksjoner $\sinh, \cosh, \tanh, \ldots$
  - Eksponential- og logaritmefunksjoner $f(x) = a^x, \ln$

Kapittel 2: Grenser og kontinuitet

Definisjon:

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ hvis vi kan få $f(x)$ villkårlig nær L ved å velge x tilstrekkelig nær c.

Grenselover

- Grenser og algebraiske operasjoner
  - $\lim_{x\to a}(k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)) = k_1 \lim_{x\to a} f_1(x) + k_2 \lim_{x\to a} f_2(x)$.
  - $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ dersom nevneren i dette uttrykket er ulik 0.
  - l'Hôpitals regel. Kap. 4.6
- Grenser og ulikheter
  - Klemmeloven
  - Grenser respekterer ulikheter:

$$f \leq g \text{ i en omegn om } a \quad \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$$

Alt dette har gyldighet også for ensidige grenser og grenser i ∞, samt også for grenseverdien ∞, i den grad reglene gir oss et meningsfullt svar.

Kapittel 2: Grenser og kontinuitet

Asymptoter

- Vertikal: Linjen $x = a$ er en vertikal asymptote for f dersom

$$\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty.$$

- Horisontal: Linjen $y = c$ er en horisontal asymptote for f dersom

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = c$$

- Skrå: Linjen $y = ax + b$ er en skrå asymptote for f dersom

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

Kapittel 2: Grenser og kontinuitet

Kontinuitet

f er kontinuerlig i punktet c dersom.

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

- Algebraiske kombinasjoner av kontinuerlige funksjoner er kontinuerlige der de er definert.
- Funksjoner sammensatt av kontinuerlige funksjoner er kontinuerlige der de er definert. $(F = g \circ f)$
- Kontinuerlige funksjoner respekterer grenser:

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

dersom f er kontinuerlig i punktet $c = \lim_{x \to a} g(x)$.

Skjæringssetningen

Hvis f er kontinuerlig på $[a, b]$ og y ligger mellom $f(a)$ og $f(b)$, da finnes en c mellom a og b slik at $f(c) = y$.

Kapittel 3: Derivasjon

- Definisjon: $f'(x) = \lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x))/h$
- Deriverbarhet $\Rightarrow$ kontinuitet.
- Derivasjonsregler[1].
  - $(k_1 u + k_2 v)' = k_1 u' + k_2 v'$. (*linearitet*)
  - Produktregelen: $(uv)' = uv' + vu'$;
  - Kjerneregelen: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$
- Kvotientregelen[2]: $(u/v)' = (vu' - uv')/v^2$.
- (Darboux' teorem: Den deriverte oppfyller en skjæringslov à la skjæringssetningen.)

[1] Disse reglene danner grunnlaget for all derivasjonsregning. Faktisk bestemmer disse egenskapene derivasjonsoperasjonen fullstendig.

[2] Oppgave: Utled kvotientregelen fra produktregelen og kjerneregelen.

Kapittel 3: Derivasjon

Teknikker

- Implisitt derivasjon. Spesialtilfelle: Logaritmisk derivasjon.
- Parametrisk derivasjon
- Relaterte rater

Relatert teknikk: Derivasjon av den inverse funksjon:

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(f^{-1}(x))}$$

Kapittel 3: Derivasjon

Tolkninger

- Hastighet: Den deriverte av posisjonen som funksjon av tid.
- Marginalkostnad: Den deriverte av den totale kostnaden som funksjon av produksjonsvolum. Hva koster det å øke produksjonsvolumet med 1 enhet?
- Endringsrater
- Stigningstall

Kapittel 4: Anvendelser av derivasjon

Kurvedrøfting: Ekstremverdiproblemer

Nødvendige betingelser for at $x = c$ er et ekstrempunkt for f

- Enten: $x = c$ er et endepunkt i definisjonsområdet til f
- Eller: $x = c$ er et kritisk punkt for f. D.v.s et av tilfellene
  - $f'(c) = 0$
  - $f'(c)$ eksisterer ikke.

Kapittel 4: Anvendelser av derivasjon

Kurvedrøfting: Fortegnet til den deriverte

Hvis den deriverte f' skifter mellom pos. og neg. fortegn i $x = c$, er dette et lokalt ekstrempunkt. Argument:

- $f' > 0 \Rightarrow f$ er voksende.
- $f' < 0 \Rightarrow f$ er avtagende.

f' kan skifte fortegn bare der $f' = 0$ eller f' ikke er definert. (Jfr. Darboux' teorem.). D.v.s. i kritiske punkter.

Kapittel 4: Anvendelser av derivasjon

Kurvedrøfting: Konkavitet og vendepunkter

- Konkav opp: $f'' > 0$ [:-)]
- Konkav ned: $f'' < 0$ [:-(]

Punkter der konkaviteten endres: Vendepunkter

Konkavitet og ekstrempunkter

- $f' = 0$, $f'' < 0 \Rightarrow$ lokalt maksimum.
- $f' = 0$, $f'' > 0 \Rightarrow$ lokalt minimum.

Kapittel 4: Anvendelser av derivasjon

Viktige begreper i kurvedrøfting:

- Funksjonens definisjonsområde. (For hvilke x er $f(x)$ definert?)
- Asymptoter, oppføsel i ∞
- Kritiske punkter for f. (Potensielle ekstrempunkter)
- Fortegnet til f'. (Hvor er funksjonen stigende/synkende)
- Kritiske punkter for f' (Potensielle vendepunkter)
- Fortegnet til f''. (Hvor er funksjonen konkav opp /ned)
- Lokale/Globale ekstrempunkter.

Dette er verktøykassen vår.

Kapittel 4: Anvendelser av derivasjon

Flere anvendelser:

- Optimalisering: Finn globale ekstrempunkter.
- Grenseverdier: l'Hôpitals regel: Hvis f, g er kontinuerlige og $f(c) = g(c) = 0$, er

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Newtons metode for løsning av ligningen $f(x) = 0$ ved iterasjon. (Løs lineariserte problem gjentatte ganger.)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Kapittel 4: Anvendelser av derivasjon

Litt om teorien:

- Ekstremverdisetningen.
- Middelverdisetningen (Rolles teorem)
- Nesten-entydighet av antideriverte: $f' = g'$ på $[a, b] \Rightarrow f = g + C$ på $[a, b]$.

Notasjon for antideriverte

Vi skriver

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Dette betyr: F er en antiderivert til f

Kapittel 5: Integrasjon

Det bestemte integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

Tolkninger

- Grense av Riemann-summer.
- Areal mellom grafen $y = f(x)$ og x-aksen. Obs: Ta hensyn til fortegn.

Anta: G er antiderivert til f på $[a, b]$.

Da er

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Kapittel 5: Integrasjon

Regneregler:

- $\int_a^b (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x))dx = k_1 \int_a^b f_1(x)dx + k_2 \int_a^b f_2(x)dx$ (*linearitet*)
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- Hvis $f \geq g$ på $[a, b]$, er $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Dersom alle enkeltelementene her er veldefinert.
Dette forteller oss at dersom funksjonene f_1 og f_2 er integrerbare på $[a, b]$, så er kombinasjonen $k_1 f_1 + k_2 f_2$ også integrerbar på $[a, b]$.

Kapittel 5: Integrasjon

Analysens fundamentalteorem

La f være kontinuerlig på $[a, b]$

- $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ gir en deriverbar funksjon på $[a, b]$.
- $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$.
- Hvis G er er en antiderivert til f på hele $[a, b]$, så er

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Dette forteller oss videre at funksjoner som er kontinuerlige på $[a, b]$ er integrerbare på $[a, b]$. Vi har dermed følgende implikasjoner:

$$f \text{ deriverbar på } [a, b] \Rightarrow f \text{ kontinuerlig på } [a, b] \Rightarrow f \text{ integrerbar på } [a, b] \quad (1)$$

Kapittel 5: Integrasjon

Substitusjonsregelen:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Skifte av variabler (generelt):

- Uttrykk integranden $f(x)$ som funksjon av den nye variabelen.
- Uttrykk dx ved den nye variabelen. Formel: $dx = \frac{dx}{du}du$

Kapittel 5: Integrasjon

Foreløbig liste over anvendelser:

- Areal mellom kurver.
- Definisjon av funksjoner ved integralformler.

Kroneksempel

$$ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Denne formelen sikrer:

- Denne funksjonen finnes faktisk.
- Denne funksjonen har følgende egenskaper:
  - $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
  - $\ln(a^r) = r \ln(a)$

Herigjennom kan vi definere eksponensialfunksjoner og potenser.