L'Hôpitals regel

La $f(x)$ og $g(x)$ være funksjoner, la $a \in [-\infty, \infty]$ og anta at der finnes et $\delta > 0$ slik at $f(x)$ og $g(x)$ er deriverbare i $]a - \delta, a[$ (hvis $a \neq -\infty$) og i $]a, a + \delta[$ (hvis $a \neq \infty$).

1. Hvis $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ og $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eksisterer, da er

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2. Hvis $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ og $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eksisterer, da er

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Cauchys middelverdisetning

La $f(x)$ og $g(x)$ være funksjoner som er kontinuerlige i $[a, b]$ hvor $a < b$, og anta at $f(x)$ og $g(x)$ er deriverbare for alle $x \in]a, b[$. Hvis $g'(x) \neq 0$ for alle $x \in]a, b[$ finnes et $c \in]a, b[$ slik at

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Teorem

La $f(x)$ være en funksjon.

1. Hvis $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$ og $C \in \mathbb{R}$, da er også $F(x) + C$ en antiderivert til $f(x)$.
2. Hvis $F(x)$ og $G(x)$ begge er antideriverte til $f(x)$, da finnes et $C \in \mathbb{R}$ slik at $G(x) = F(x) + C$.

Antideriverte

$k \in]-\infty, \infty[\setminus \{0\}$

Funksjon	Antideriverte
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \ n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\sin(kx)$	$-\frac{1}{k}\cos(kx) + C$
$\cos(kx)$	$\frac{1}{k}\sin(kx)$
$\sec^2(kx)$	$\frac{1}{k}\tan(kx) + C$
$\csc^2(kx)$	$-\frac{1}{k}\cot(kx) + C$
$\sec(kx)\tan(kx)$	$\frac{1}{k}\sec(kx) + C$
$\csc(kx)\cot(kx)$	$-\frac{1}{k}\csc(kx) + C$
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx} + C$
a^{kx}	$\frac{1}{k\ln a}a^{kx} + C, \ a > 0, \ a \neq 1$
$\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	$\frac{1}{k}\arcsin(kx) + C, \ -1 < kx < 1$
$\frac{1}{1+k^2x^2}$	$\frac{1}{k}\arctan(kx) + C$
$\frac{1}{x\sqrt{k^2x^2-1}}$	$\operatorname{arcsec}(kx) + C, \ kx > 1$

Antideriverte

$k \in]-\infty, \infty[\setminus \{0\}$

Funksjon	Antideriverte
$\sinh(kx)$	$\frac{1}{k}\cosh(kx) + C$
$\cosh(kx)$	$\frac{1}{k}\sinh(kx) + C$
$\operatorname{sech}^2(kx)$	$\frac{1}{k}\tanh(kx) + C$
$\operatorname{csch}^2(kx)$	$-\frac{1}{k}\coth(kx) + C$
$\operatorname{sech}(kx)\tanh(kx)$	$-\frac{1}{k}\operatorname{sech}(kx) + C$
$\operatorname{csch}(kx)\coth(kx)$	$-\frac{1}{k}\operatorname{csch}(kx) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1+k^2x^2}}$	$\frac{1}{k}\operatorname{arcsinh}(kx) + C$
$\frac{1}{\sqrt{k^2x^2-1}}$	$\frac{1}{k}\operatorname{arccosh}(kx) + C,\ \ kx > 1$
$\frac{1}{1-k^2x^2}$	$\frac{1}{k}\operatorname{arctanh}(kx) + C,\ \ \lvert kx\rvert < 1$
$\frac{1}{1-k^2x^2}$	$\frac{1}{k}\operatorname{arccoth}(kx) + C,\ \ \lvert kx\rvert > 1$
$\frac{1}{x\sqrt{1-k^2x^2}}$	$\operatorname{arcsech}(kx) + C,\ 0 < kx < 1$
$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{1+k^2x^2}}$	$\operatorname{arcsech}(kx) + C,\ \ kx \neq 1$

Regneregler for antideriverte

Hvis $f(x)$ og $g(x)$ er funksjoner, $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$, $G(x)$ er en antiderivert til $g(x)$ og $k \in \mathbb{R}$, da gjelder:

1. $kF(x)$ er en antiderivert til $k(fx)$.
2. $F(x) + G(x)$ er en antiderivert til $f(x) + g(x)$.