TMA4100 Matematikk1
Høst 2008

Løsningsforslag — Øving 12

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

8.9.26 Vi serieutvikler eksponentialfunksjonen e^u om $u = 0$ og får

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}$$

Sett inn $u = -t^2$ og gang uttrykket med t^2 for å få integranden

$$t^2 e^{-t^2} = t^2 - t^4 + \frac{1}{2}t^6 - \frac{1}{6}t^8 + \frac{1}{24}t^{10} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2(k+1)}}{k!}$$

Denne rekken integreres leddvis

$$F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{14}x^7 - \frac{1}{54}x^9 + \frac{1}{264}x^{11} - \frac{1}{1560}x^{13} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+3}}{(2k+3)k!}.$$

La $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+3}}{(2k+3)k!}$. Observer av dette er en alternerende rekke for $0 \le x \le 1$. Av feilestimat formelen for alternerende rekker (Th. 15 s. 539) følger at $|F(x) - P_n(x)| \le \frac{|(-1)^{n+1}x^{2(n+1)+3}|}{(2(n+1)+3)(n+1)!} \le \frac{1}{(2(n+1)+3)(n+1)!}$. Den siste uligheten følger av at $x \le 1$. Mao;

$$|F(x) - P_1(x)| \le \frac{1}{(2(1+1)+3)(1+1)!} = 1/14$$
$$|F(x) - P_2(x)| \le \frac{1}{(2(2+1)+3)(2+1)!} = 1/54$$
$$|F(x) - P_3(x)| \le \frac{1}{(2(3+1)+3)(3+1)!} = 1/264$$
$$|F(x) - P_4(x)| \le \frac{1}{(2(4+1)+3)(4+1)!} = 1/1560 < 10^{-3}$$

Polynomet $P_4(x)$ tilnærmer $F(x)$ med feil mindre enn 10^{-3} i intervallet $[0, 1]$.

8.9:37 Først finn vi Maclaurin-rekka til $f(x) = \cos 2x$. Dei deriverte av $\cos 2x$ er

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos 2x, & f'(x) &= -2\sin 2x \\
f''(x) &= -2^2 \cos 2x, & f^{(3)}(x) &= 2^3 \sin 2x \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(2n)}(x) &= (-1)^n 2^{2n} \cos 2x, & f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^{n+1} 2^{2n+1} \sin 2x
\end{aligned}$$

Maclaurin-rekka til $f(x)$ er difor

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j2^{2j}}{(2j)!}x^{2j}.$$

Her er det brukt at $\cos 0=1$ og at $\sin 0=0$. Ved å bruke identiteten som er gitt i oppgåva følgjer at Maclaurinrekka til $\sin^2 x$ er lik rekka til $\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}$.

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j2^{2j}}{(2j)!}x^{2j}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}2^{2j-1}}{(2j)!}x^{2j}.$$

Ved å derivere rekka leddvis får ein at Maclaurinrekka til $(\sin^2 x)'=2\sin x\cos x$ er lik

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}2^{2j-1}2j}{(2j)!}x^{2j-1}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}2^{2j-1}}{(2j-1)!}x^{2j-1}.$$

Maclaurin-rekka til $g(x)=\sin 2x$ finn vi på samme måte som vi fann rekka til $\cos 2x$.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sin 2x, & g'(x) &= 2\cos 2x\\
g''(x) &= -2^2\sin 2x, & g^{(3)}(x) &= -2^3\cos 2x\\
&\vdots & &\vdots\\
g^{(2n)}(x) &= (-1)^n2^{2n}\sin 2x, & g^{(2n+1)}(x) &= (-1)^n2^{2n+1}\cos 2x
\end{aligned}$$

Ved å bruke at $\cos 0=1$ og $\sin 0=0$ får ein at Maclaurinrekka er lik

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}2^{2j+1}}{(2j+1)!}x^{2j+1}.$$

Ein kan lett sjå at denne rekka er lik rekka ovanfor ved å endre summasjonsgrensa.

$\boxed{\text{8.10.8}}$ Vi bruker formelen for binomiske rekker.

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{3}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{3}}{k}(x^2)^k=1-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{9}x^4-\frac{14}{81}x^6+\dots$$

$\boxed{\text{8.10.18}}$ Formelen for binomiske rekker gir oss

$$\left((1-x^2)^{-1}\right)^2=(1-x^2)^{-2}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{-2}{k}(-x^2)^k=1+2x^2+3x^4+4x^6+5x^8+\dots$$

Vi multipliserer denne med $2x$.

$$\frac{2x}{(1-x^2)^2}=2x+4x^3+6x^5+8x^7+10x^9+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}2(k+1)x^{2k+1}$$

Alternativt kan man se at $\left((1-x^2)^{-1}\right)'=(1-x^2)^{-2}$. Vi kan dermed komme fram til det samme svaret ved å derivere rekkeutviklingen til $(1-x^2)^{-1}$.

15.1.1 *d*. Vi ser at $y' = 0$ når $y = -x$, det tilsvarer de horisontale pilene i figur *d*.

15.1.2 *c*. Siden y' ikke avhenger av x, er figur c den eneste muligheten. Vi ser også at $y' = 0$ når $y = -1$.

15.1.3 *a*. $y' = 0$ når $x = 0$ (horisontale piler) og y' går mot $\pm\infty$ (vertikale piler) når y går mot 0 og $x \neq 0$.

15.1.4 *b*. $y' = 0$ (horisontale piler) når $y^2 = x^2$, det vil si når $y = x$ og $y = -x$.

15.1.14 Picards iterasjonsmetode er gitt som

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,\mathrm{d}t$$

Med $f(x, y) = x + y$ og $y_0 = y(0) = 0$ får vi

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 0 \\
y_1(x) &= 0 + \int_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2 \\
y_2(x) &= 0 + \int_0^x (t + \frac{1}{2}t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \\
y_3(x) &= 0 + \int_0^x (t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4
\end{aligned}$$

15.2.20 Dette er en separabel differensialligning.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy &= x \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x(1 - y) \\
\int \frac{1}{1 - y}\,\mathrm{d}y &= \int x\,\mathrm{d}x \\
-\ln|1 - y| &= \frac{1}{2}x^2 + C_1 \\
1 - y &= C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}$$

Bruk initialbetingelsen til å finne $C_2 = 7$.

$$y(x) = 1 - 7\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Alternativt kan man løse ligningen ved hjelp av integrerende faktor. Ligningen er oppgitt på standardform der $P(x) = x$ og $Q(x) = x$. Vi finner integrerende faktor.

$$v(x) = \mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$$

Multipliser begge sider av ligningen med $v(x)$ og integrer.

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}x^2}y' + e^{\frac{1}{2}x^2}xy &= e^{\frac{1}{2}x^2}x \\ (ye^{\frac{1}{2}x^2})' &= e^{\frac{1}{2}x^2}x \\ ye^{\frac{1}{2}x^2} &= \int e^{\frac{1}{2}x^2}x\,dx = e^{\frac{1}{2}x^2} + C_3 \\ y(x) &= 1 + C_3e^{-\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

Bruker initialbetingelsen og finner $C_3 = -7$.

$$y(x) = 1 - 7e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$\boxed{15.2.22}$ **a)** Ligningen er allerede på standardform med $P(t) = \frac{k}{m}$ og $Q(t) = 0$. Vi finner integrerende faktor.

$$v(x) = e^{\int P\,dt} = e^{\frac{k}{m}t}$$

Multipliser og integrer.

$$\begin{aligned} e^{\frac{k}{m}t}u' + e^{\frac{k}{m}t}\frac{ku}{m} &= 0 \\ (e^{\frac{k}{m}t}u)' &= 0 \\ e^{\frac{k}{m}t}u &= C_1 \\ u(t) &= C_1e^{-\frac{k}{m}t} \end{aligned}$$

Bruker initialbetingelsen til å finne $C_1 = u_0$.

$$u(t) = u_0e^{-\frac{k}{m}t}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \frac{ku}{m} &= 0 \\ \int \frac{1}{u}\,du &= \int (-\frac{k}{m})\,dt \\ \ln|u| &= -\frac{k}{m}t + C_2 \\ u(t) &= C_3e^{-\frac{k}{m}t} \\ u(t) &= u_0e^{-\frac{k}{m}t} \end{aligned}$$

$\boxed{15.2.28}$ Vi har følgende sammenheng

Endringsraten av CO i rommet = Raten CO kommer inn − Raten CO går ut

La $y(t)$ være mengden CO i rommet, og $V = 4500$ være volumet av rommet. Da blir

$$\text{Raten CO går ut} = \frac{y(t)}{V} \cdot \text{Raten luft blir pumpet ut}$$

Bruk at luft blir pumpet inn og ut med samme rate 0.3 og luften som blir pumpet inn inneholder 4% CO, da får vi av den første sammenhengen

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 0.3 \cdot \frac{4\%}{100\%} - \frac{0.3}{4500}y(t)$$

Vi setter denne på standard form.

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{0.3}{4500}y(t) = 0.3 \cdot 0.04$$

Her er $P = \frac{0.3}{4500}$ og $Q = 0.3 \cdot 0.04$, denne differensialligningen kan løses ved å multiplisere med integrerende faktor $v(t) = \mathrm{e}^{\int P\,\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{\frac{0.3}{4500}t}$. Vi får

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\frac{0.3}{4500}t}y' + \frac{0.3}{4500}\mathrm{e}^{\frac{0.3}{4500}t}y &= 0.3 \cdot 0.04\mathrm{e}^{\frac{0.3}{4500}t} \\
(y\mathrm{e}^{\frac{0.3}{4500}t})' &= 0.3 \cdot 0.04\mathrm{e}^{\frac{0.3}{4500}t} \\
y\mathrm{e}^{\frac{0.3}{4500}t} &= \int 0.3 \cdot 0.04\mathrm{e}^{\frac{0.3}{4500}t}\,\mathrm{d}t = 4500 \cdot 0.04\mathrm{e}^{\frac{0.3}{4500}t} + C
\end{aligned}$$

Ser at $4500 \cdot 0.04 = 180$. Bruk så initialbetingelsen $y(0) = 0$ til å finne $C = -180$, det gir

$$y(t) = 180\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{0.3}{4500}t}\right)$$

I oppgaven spør de om hvilken t som gir $\frac{y(t)}{4500} = \frac{0.01\%}{100\%}$.

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{4500 \cdot 0.01}{100} \\
1 - \mathrm{e}^{-\frac{0.3}{4500}t} &= 0.0025 \\
\mathrm{e}^{-\frac{0.3}{4500}t} &= 1 - 0.0025 = 0.9975 \\
-\frac{0.3}{4500}t &= \ln(0.9975) \\
t &= -\frac{4500}{0.3}\ln(0.9975) \approx 38
\end{aligned}$$

Det tar altså cirka 38 minutter før karbonmonoksidkonsentrasjonen når 0.01%.

15.3:1

a) Av likning (1) får ein at farta til syklisten er lik

$$v(t) = v_0 e^{-kt/m}$$

der $v0 = v(0) = 9m/s$, $k = 3.9kg/s$ og $m = 66 + 7$. Ved å integrere får ein at

$$s(t) = \int v(t)\,dt = v_0 \int e^{-kt/m}\,dt = C - \frac{mv_0}{k}e^{-kt/m}.$$

Konstanten C finn ein ved å bruke at $s(0) = 0 \Rightarrow C = \frac{mv_0}{k} e^{-k \cdot 0/m} = \frac{mv_0}{k}$. Så

$$s(t) = \frac{mv_0}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right).$$

Strekninga syklisten rullar finn ein ved å finne grensa $\lim_{t\to\infty} s(t)$. Strekninga syklisten rullar er difor lik

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{mv_0}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right) = \frac{mv_0}{k} \approx 168.5.$$

b) Tida det tek før syklisten rullar i $1m/s$ er lik

$$v(t) = v_0 e^{-kt/m} = 1$$
$$\Downarrow$$
$$\ln v_0 - \frac{kt}{m} = \ln 1$$
$$\Downarrow$$
$$t = \frac{m \ln v_0}{k} \approx 41.1.$$

Det tek med andre ord tilnærma lik 41.1 sekund før syklisten rullar med ei fart på $1m/s$.

$\boxed{\text{Eksamensoppgave 27}}$ **a)** Når $x \to 0$ er dette eit $'\frac{0}{0}'$ uttrykk. Ved å bruke analysens fundamentalsetning og l'Hopital's regel følger

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\, dt}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} = \frac{2x}{(1+x^2)6x} = 1/3.$$

b) Dette er ei separabel differensiallikning. Ved å samle x og y ledda på kvar si side av likskapsteiknet og deretter integrere får ein

$$y\, dy = \frac{dx}{x^2}$$
$$\Downarrow$$
$$y^2/2 = -1/x + C$$
$$\Downarrow$$
$$y = \pm\sqrt{C - 2/x}.$$

$y(1) = 1$ gir at $y(x) = +\sqrt{3 - \frac{2}{x}}$.

$\boxed{\text{Eksamensoppgave 50}}$ Opplysningene i oppgaven gir oss at

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = kP(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}, \qquad \text{der } k \text{ er en konstant}$$

Dette er en separabel differensialligning.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{P}\,\mathrm{d}P &= \int k\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \\ \ln|P| &= -\frac{k}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t} + C_1 \\ P(t) &= C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t}}\end{aligned}$$

Bruk initialbetingelsen til å finne $C_2 = P_0\mathrm{e}^{\frac{k}{\alpha}}$.

$$P(t) = P_0\mathrm{e}^{\frac{k}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})}$$

Ved å ta grenseverdien får vi

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = P_0\mathrm{e}^{\frac{k}{\alpha}}$$

siden $\alpha > 0$. Dette er en konstant.

Eksamensoppgave 78

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

a) Vi må først vise at formelen gjelder for $n = 1$. Vi deriverer $f(x)$ direkte

$$f'(x) = \frac{1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}$$

Sett inn $n = 1$ i formelen, dette gir

$$f'(x) = \frac{1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}$$

Siden disse er like har vi vist at den gjelder for $n = 1$. Vi antar så at formelen gjelder for $n = k$, det vil si

$$f^{(k)}(x) = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!(1-x)^{\frac{2k+1}{2}}}$$

Vi må vise at den deriverte av dette uttrykket tilfredstiller formelen for $n = k+1$. Vi deriverer

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f^{(k)}(x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{(2k)!}{2^{2k}k!(1-x)^{\frac{2k+1}{2}+1}} \cdot \frac{2k+1}{2} \\ &= \frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}k!(1-x)^{\frac{2k+1}{2}+1}}\end{aligned}$$

Gang med $2(k+1)$ over og under brøkstreken.

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}(k+1)!(1-x)^{\frac{2k+1}{2}+1}} \\
&= \frac{(2(k+1))!}{2^{2(k+1)}(k+1)!(1-x)^{\frac{2(k+1)+1}{2}}} \\
&= f^{(k+1)}(x)
\end{aligned}$$

Vi har vist at $\frac{\mathrm{d}f^{(k)}(x)}{\mathrm{d}x} = f^{(k+1)}(x)$, som er det andre kravet i et induksjonsbevis. Ved induksjon følger det at formelen gjelder for alle heltall $n > 0$, som var det vi skulle vise.

b) Taylors formel gir

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}x^3 \\
R_3(x) &= \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4, \qquad \text{for en } 0 < c \leq x \text{ og } x < 1
\end{aligned}$$

Vi setter inn i formelen for de deriverte og finner

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f^{(n)}(0) &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}
\end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16} \\
R_3(x) &= \frac{35}{128}(1-c)^{-\frac{9}{2}}x^4, \qquad \text{for en } c \text{ mellom } 0 \text{ og } x, \text{ og } x < 1.
\end{aligned}$$

c må være i intervallet $[-0.1, 0.1]$. Vi velger $c = x = 0.1$ da det gjør at restleddet $R_3(x)$ blir størst mulig, slik er vi garantert at feilen er mindre enn $R_3(x)$.

$$R_3(0.1) \leq \frac{35}{128}(1-0.1)^{-\frac{9}{2}}(0.1)^4 \approx 4.4 \cdot 10^{-5} < 5 \cdot 10^{-5}$$

Ved å sette inn i $f(x)$ og $P_3(x)$ får vi

$$|f(0.1) - P_3(0.1)| = \left| \frac{1}{\sqrt{0.9}} - (1 + \frac{1}{2}0.1 + \frac{3}{8}0.1^2 + \frac{5}{16}0.1^3) \right| \approx 3 \cdot 10^{-5}$$

Vi må finne en $R_n(x)$ som garantert er mindre enn $5 \cdot 10^{-7}$ for $|x| < 0.1$. Det vil si må løse

$$\frac{f^{(n)}(0.1)}{n!}0.1^n < 5 \cdot 10^{-7}$$

Ved å sette inn forskjellige n finner vi

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(5)}(0.1)}{5!}0.1^5 &\approx 4 \cdot 10^{-6} \\
\frac{f^{(6)}(0.1)}{6!}0.1^6 &\approx 4 \cdot 10^{-7}
\end{aligned}$$

Altså må vi velge $n \geq 6$ for å få ønsket nøyaktighet.