I know what you did last ~~summer~~ forelesning

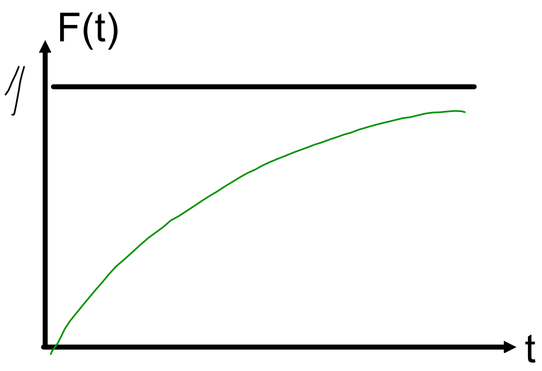
4.1: Kontinuerlige stokastiske variable/sannsynlighetsfordelinger

- at X er kontinuerlig betyr at X kan ha en hvilken som helst verdi på et intervall
- eksempler: levetid til lyspære, mengde brus som fabrikken tapper på brusflaska
- sannsynlighetstetthet $f(x)$: en slags analogi til punktsannsynlighet
- fordelingsfunksjonen $F(x) = P(X \le x)$ angir den kumulative sannsynligheten for at variablene er mindre enn eller lik en viss verdi
- NB: når X er kontinuerlig er det ingen forskjell på f.eks. $P(X \le x)$ og $P(X < x)$, $P(a \le X \le b)$ og $P(a < X < b)$ etc.

4.2: Ekponentialfordelingen

- utgangspunkt: Poisson-prosess med intensitet α
- variabelen T angir tiden det tar før hendelsen inntreffer første gang
- fordelingsfunksjonen $F(t) = P(T \le t)$ brukes til å beregne sannsynligheten for at første hendelse skal skje innen tiden t

$$\boxed{\begin{aligned} F(t) &= P(T \le t) \\ &= 1-e^{-\alpha t} \end{aligned}}$$



Eksempel (eksamen desember 2014)

Oppgave 3

Antall skåringer for Rosenborg i en kamp kan antas å være Poissonfordelt med forventning 1.5 hvis de spiller på hjemmebane og Poissonfordelt med forventning 1.0 hvis de spiller på bortebane. Man spiller like mange kamper hjemme som borte.

a) Finn sannsynligheten for at Rosenborg skårer minst 2 mål i en tilfeldig kamp på hjemmebane.

b) i. Finn sannsynligheten for at Rosenborg skårer nøyaktig 3 mål i en tilfeldig kamp.
ii. I en tilfeldig kamp skårte Rosenborg 3 mål. Finn sannsynligheten for at kampen ble spilt på hjemmebane.

c) En fotballkamp varer i 90 minutter (antar ingen overtid). Finn sannsynligheten for at Rosenborg skårer innen 5 minutter på en kamp på bortebane.

Svar:

a) Innfører X: antall mål. Her er $\lambda = 1,5$ (hjemmebane), slik at

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$$

$$= 1 - 0,558$$

$$= \underline{\underline{0,442}}$$

b) i) Innfører (X er samme som før):
H: hjemmekamp
B: bortekamp

Lov om total sannsynlighet:

$$P(X=3) = P(X=3 \mid H) \cdot P(H) + P(X=3 \mid B) \cdot P(B)$$

Her er $P(H) = \frac{1}{2} = P(B)$. Dessuten er

$$P(X = 3 \mid H) = \frac{\lambda^3 \cdot e^{-\lambda}}{3!}$$

Her er $\lambda = 1,5$ p.g.a. hjemmekamp

$$= \frac{1,5^3 e^{-1,5}}{3!} = \underline{0,126}$$

$$P(X=3 \mid B) = \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}$$

Her er $\lambda = 1,0$ p.g.a. bortekamp

$$= \frac{1,0^3 \cdot e^{-1,0}}{3!} = \underline{0,0613}$$

Innsatt:

$$P(X=3) = 0,126 \cdot \frac{1}{2} + 0,0613 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \underline{\underline{0,094}}$$

b) ii) Skal finne $P(H \mid X=3)$. Bayes':

$$P(H \mid X=3) = \frac{P(H) \cdot P(X=3 \mid H)}{P(X=3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}126}{0{,}094} = \underline{\underline{0{,}67}}$$

c) La T være tiden det tar før første mål scores. Her vil T være eksponentialfordelt med intensitet

$$\alpha = \frac{1 \text{ mål}}{90 \text{ min}} = \frac{1}{90} \frac{\text{mål}}{\text{min}}$$

Bortebane; 1 mål pr. kamp

Sanns. for ett mål innen 5 minutter fra kampstart:

$$P(T \leq 5) = 1 - e^{-\alpha \cdot t}$$

Formelark for $F(t)$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{90} \cdot 5}$$

$$= \underline{\underline{0{,}054}}$$

$15^{\underline{08}}$

Eksempel

Antall innkomne samtaler per time til et sentralbord som har åpent hele uka, er Poisson-fordelt med λ = 20 på mandag-fredag, og λ = 10 på lørdag og søndag.

Hva er sannsynligheten for at antall innkomne samtaler i løpet av en time er 15 eller flere på en tilfeldig valgt dag?

Svar: la X være antall innkomne samtaler i løpet av en time.

Innfører

A: arbeidsdag (man - fre)

H: helg (lør - søn)

Lov om total sannsynlighet

$$P(X \geq 15) = P(X \geq 15 | A) \cdot P(A) + P(X \geq 15 | H) \cdot P(H)$$

Her er

$$P(A) = \frac{5}{7}$$

$$P(H) = \frac{2}{7}$$

Finner $P(X \geq 15 | A)$ fra kumulativ ford. med $\lambda = 20$:

$$P(X \geq 15 | A) = 1 - P(X \leq 14 | A)$$

$$= 1 - 0,105$$

$$= \underline{0,895}$$

Finner $P(X \geq 15 | H)$ på samme vis ($\lambda = 10$):

$$P(X \geq 15 | H) = 1 - P(X \leq 14 | H)$$

$$= 1 - 0,917$$

$$= \underline{0,083}$$

Det gir:

$$P(X \geq 15) = 0,895 \cdot \frac{5}{7} + 0,083 \cdot \frac{2}{7}$$

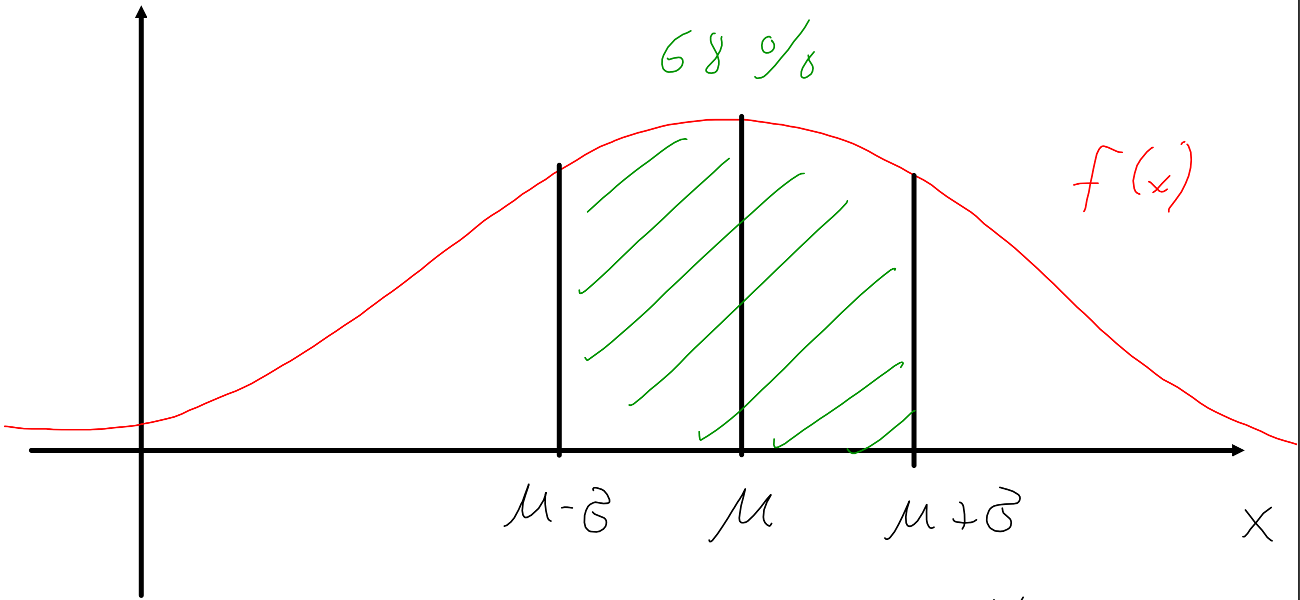
$$= \underline{\underline{0,663}}$$

4.3: Normalfordelingen

- kontinuerlig sannsynlighetsfordeling som dukker opp over alt

- sannsynlighetstettheten

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \approx e^{-x^2}$$



- notasjon: at X er normalfordelt med forventningsverdi μ og varians σ^2 skrives

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- eksempler på normalfordelte størrelser:
  - IQ-skoren for en befolkning er $\sim N(100, 15^2)$

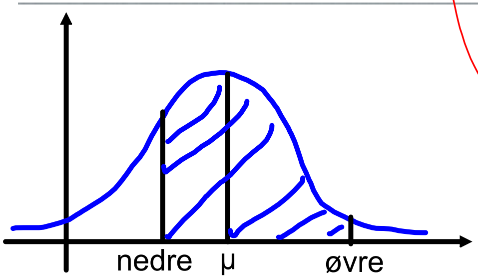
Generell kumulativ normalfordeling

Generell normalfordeling $N(\mu,\sigma^2)$ har ingen enkel form for kumulativ fordeling - finnes heller ikke tabeller for dette.

Kan istedet bruke kalkis til å beregne P(nedre<X<øvre), eller P(X≤x):

Casio	Texas
Hovedmeny -> Stat -> Dist -> NORM -> Ncd	2nd + Vars (for å få Dist) -> normalcdf() Syntaks: normalcdf(nedre,øvre, μ,σ)

```
Normal C.D
Lower    :0
Upper    :0
σ        :1
μ        :0
Save Res:None
Execute
```



NB! Kalkulatoren forventer at vi taster inn σ (standardavviket), <u>ikke</u> variansen σ^2. Så hvis vi har oppgitt f.eks. $X \sim N(\mu,\sigma^2) \sim N(100,30)$, må vi passe på å taste inn $\sqrt{30}$ for σ.

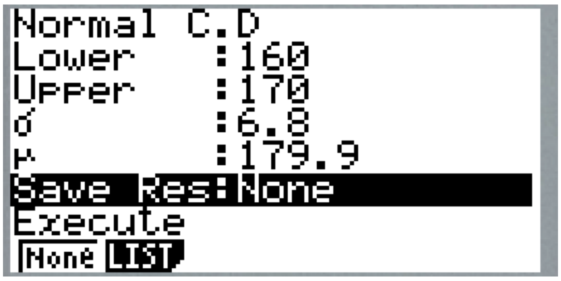
Eksempel

Ved sesjon i 2003 var høyden X til norske rekrutter normalfordelt som $X \sim N(179{,}9,\ 6{,}8^2)$.

Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig utplukket rekrutt hadde en høyde mellom 160 og 170 cm?

Svar: her er $\mu = 179{,}9$ og $\sigma = 6{,}8$.
Skal finne

$$P(160 < X < 170)$$



Setter inn på kalkis

Får at

$$P(160 < X < 170) = \underline{\underline{0{,}071}}$$