### Mengdelære

Uttrykket
$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$
kalles en mengde, og $a_1, a_2, \cdots, a_n$ kalles mengdens elementer. To eksempler på mengder er
$$A = \{1, 2\}$$
og
$$B = \{1, 3, 4\}.$$
Vi kan kombinere mengder til nye mengder. De viktigste operasjonene er union, snitt og komplement.

- $A \cup B$ : Alt som er i enten $A$ eller $B$ eller begge.
- $A \cap B$ : Alt som er i både $A$ og $B$.
- $\overline{A}$ : Alt som ikke er i $A$.

**Eksempel.** Hvis $A = \{1, 2\}$ og $B = \{1, 3, 4\}$, er
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\},$$
$$A \cap B = \{1\}$$
og
$$\overline{B} = \{2, 5, 6\}.$$
△

Mengdeoperasjonene kan igjen kombineres, slik som
$$\overline{A \cup B} = \{5, 6\},$$
og det finnes en haug regneregler, for eksempel
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
og
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$
Jeg vet ikke om vi får bruk for dem, men skal fylle ut litt her om det trengs. Union og snitt av $n$ utfall $A_i$, skriver vi
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad \text{og} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$
Tegnet $\emptyset$ betyr 'den tomme mengden'. Dette er en mengde uten elementer.

### Utfall

Vi bruker mengder til å definere utfallene i et tilfeldig forsøk. Vi triller en terning, og definerer utfallene
$$A = \{1, 2\}$$
og
$$B = \{1, 3, 4\}.$$
Vi sier at $A$ inntreffer dersom terningen lander på 1 eller 2, og at $B$ inntreffer dersom terningen lander på 1, 3 eller 4. Utfall sies å være disjunkte dersom de ikke kan kan inntreffe samtidig. La
$$C = \{3, 4\}.$$
Utfallene $A = \{1, 2\}$ og $B = \{1, 3, 4\}$ er ikke disjunkte, for hvis terningen lander på 1, inntreffer både $A$ og $B$. Utfallene $A$ og $C$ er disjunkte. Vi skriver
$$A \cap C = \emptyset.$$

### Utfallsrom

En mengde der alt som kan skje i det tilfeldige forsøket er representert ved disjunkte utfall, kalles et *utfallsrom*. Hvis vi triller en terning, er to eksempler på utfallsrom
$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
og
$$\{oddetall, partall\}.$$
Mengden
$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$
er ikke et utfallsrom, for terningen kan lande på 6, som ikke er tatt med, mens
$$\{oddetall, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$
er heller ikke et utfallsrom, for terningkast 1, 3 og 5 er representert ved to elementer i mengden.

### Sannsynlighetsfunksjonen

Hvert utfall i vårt tilfeldige forsøk har en sannsynlighet for å inntreffe. *Sannsynlighetsfunksjonen* er en funksjon $P$ som tar inn et utfall, og gir ut sannsynligheten for utfallet. For en sannsynlighetsfunksjon setter vi opp tre krav. La $S$ være et utfallsrom.

- $0 \leq P(A) \leq 1$ for alle $A \in S$
- $P(S) = 1$
- $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ for alle $A, B \in S$

Disse tre kravene sier at sannsynligheter må være mellom null og en, de må summere til en (noe må skje), og at sannsynligheter for hendelser kan legges sammen.

**Eksempel.** Vi triller terningen. La $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Da er
$$P(i) = 1/6$$
for alle $i$ i $S$. For $A = \{1, 2\}$ og $B = \{1, 3, 4\}$ får vi
$$P(A) = P(1 \cup 2) = P(1) + P(2) = 2/6$$
og
$$P(B) = P(1 \cup 3 \cup 4) = P(1) + P(3) + P(4) = 3/6$$
Vi ser også at
$$P(A \cup B) = 4/6,$$
$$P(A \cap B) = 1/6$$
og
$$P(\overline{A}) = 4/6.$$
△

### To regneregler for sannsynlighetsfunksjonen

Den første regneregelen er lett å bevise. La $A$ være en hendelse. Det er temmelig innlysende at

$$S = A \cup \overline{A}$$

er et utfallsrom, for enten $A$ eller $\overline{A}$ må inntreffe. Hvis $P$ er en sannsynlighetsfunksjon, kan vi beregne

$$1 = P(S) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

og den første regneregelen er på plass,

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Dersom $A$ og $B$ ikke er disjunkte, finnes en variant av addisjonsegenskapen i definisjonen av sannsynlighetsfunksjonen, nemlig

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Beviset for denne er litt mer komplisert. Det kan være jeg skriver det ut senere.

**Eksempel.** La igjen

$$A = \{1, 2\}$$

og

$$B = \{1, 3, 4\}.$$

Siden

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\},$$

må $P(A \cup B) = 4/6$. Men hvis vi tar

$$P(A) + P(B) = 2/6 + 3/6 = 5/6.$$

får vi litt for høy sannsynlighet. Det er fordi utfallet $A \cap B = \{1\}$ telles to ganger, og vi må altså trekke det fra igjen for å få rett sannsynlighet,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 4/6.$$

△

### Betinget sannsynlighet

I noen tilfeller vil sannsynligheten for en hendelse avhenge av hva som er skjedd tidligere. Vi definerer et nytt type utfall

$$A|B$$

som leses 'A gitt B'.

**Eksempel.** Hvis du trekker to kort fra en stokk, vil hvorvidt du trekker ruter på andre kort avhenge om du trakk ruter på første kort. Vi setter opp utfallene $A$ = 'andre kort ruter', $B$ = 'første kort ruter', og beregner

$$P(A|B) = \frac{12}{51}$$

og

$$P(A|\overline{B}) = \frac{13}{51}$$

△

I eksemplet over, fortalte sunt bondevett oss hva sannsynlighetene var. Men vi må nesten sette opp en presis definisjon for betinget sannsynlighet. Vi definerer

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

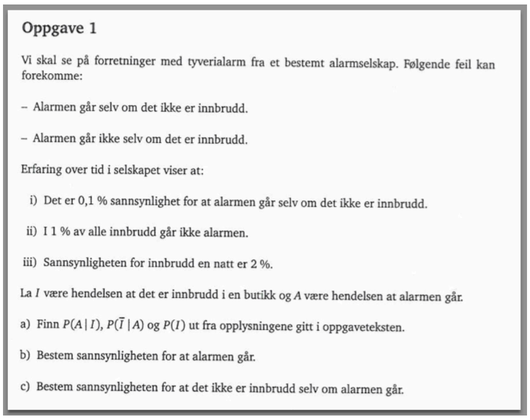
Av denne følger en ny regneregel som kalles Bayes lov. Siden $A \cap B = B \cap A$, følger at

$$P(A|B)P(B) = P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B|A)P(A),$$

eller

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

**Eksempel.** Her er en gammel eksamensoppgave fra Høgskolen i Bergen.



**Oppgave 1**

Vi skal se på forretninger med tyverialarm fra et bestemt alarmselskap. Følgende feil kan forekomme:

– Alarmen går selv om det ikke er innbrudd.

– Alarmen går ikke selv om det er innbrudd.

Erfaring over tid i selskapet viser at:

i) Det er 0,1 % sannsynlighet for at alarmen går selv om det ikke er innbrudd.

ii) I 1 % av alle innbrudd går ikke alarmen.

iii) Sannsynligheten for innbrudd en natt er 2 %.

La $I$ være hendelsen at det er innbrudd i en butikk og $A$ være hendelsen at alarmen går.

a) Finn $P(A\,|\,I)$, $P(\overline{I}\,|\,A)$ og $P(I)$ ut fra opplysningene gitt i oppgaveteksten.

b) Bestem sannsynligheten for at alarmen går.

c) Bestem sannsynligheten for at det ikke er innbrudd selv om alarmen går.

For å løse oppgaven må man være nøyaktig med å definere utfallene, og så bruke regnereglene. Vi definerer

$$A : \text{Alarmen går}$$

og

$$I : \text{Innbrudd}$$

Oppgaveteksten gir at $P(A|\overline{I}) = 0.001$, $P(\overline{A}|I) = 0.01$ og $P(I) = 0.02$. Nå er det et par andre sannsynligheter vi kan regne ut uten videre. Enten er det innbrudd, eller så er det ikke innbrudd:

$$P(\overline{I}) = 1 - P(I) = 0.98.$$

Hvis innbrudd vil alarmen enten gåa av eller ikke gå av:

$$P(A|I) = 1 - P(\overline{A}|I) = 0.99.$$

Når det ikke er innbrudd, vil alarmen enten gå av eller ikke gå av:

$$P(\overline{A}|\overline{I}) = 1 - P(A|\overline{I}) = 0.999.$$

Nå har vi funnet to av sannsynlighetene som etterspørres i oppgave a. Den tredje, $P(\overline{I}|A)$, kan vi ikke regne ut helt ennå, men den etterspørres også i oppgave c. (Denne eksamenen er nok laget i en fei. Det var mye greier på Høgskolen i Bergen.) Nå bruker vi et klassisk triks, nemlig å splitte utfallet $A$ i to

$$A = (A \cap I) \cup (A \cap \overline{I})$$

Denne ligningen sier at dersom alarmen går ($A$), er det enten innbrudd ($A \cap I$), eller så er det ikke innbrudd ($A \cap \overline{I}$). Siden utfallene $A \cap \overline{I}$ og $A \cap I$ åpenbart er disjunkte (enten er det innbrudd, eller så er det ikke innbrudd), kan vi skrive

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap I) + P(A \cap \bar{I}) \\ &= P(I)P(A|I) + P(\bar{I})P(A|\bar{I}) \\ &= 0.02 \cdot 0.99 + 0.98 \cdot 0.001 \\ &= 0.02078. \end{aligned}$$

I oppgave c) skal vi ha tak i sannsynligheten $P(\bar{I}|A)$. Den kan vi nå regne ut ved Bayes lov

$$P(\bar{I}|A) = \frac{P(\bar{I})P(A|\bar{I})}{P(A)} = \frac{0.98 \cdot 0.001}{.02078} = 0.04716.$$

△

**Uavhengighet**

To utfall $A$ og $B$ sies å være uavhengige dersom

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Sammenligner vi med definisjonen på betinget sannsynighet, ser vi at for uavhengige hendelser er

$$P(A|B) = P(A).$$

Dette forklarer hvorfor det kalles uavhengighet; sannsynligheten for at $A$ inntreffer er den samme uavhengig av hvorvidt $B$ har inntruffet.

**Eksempel.** Et enkelt eksempel på uavhengige utfall er å kaste en terning to ganger. Vi definerer

$$A_i = i \text{ øyne i kast nr. } 1$$

og

$$B_i = i \text{ øyne i kast nr. } 2$$

er utfallene $A_i$ uavhengige utfallene $B_i$. Vi beregner sannsynligheten for først 2 og så 3

$$P(A_2 \cap B_3) = P(A_2)P(B_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

△

**Litt kombinatorikk**

**Ordnet utvalg uten tilbakelegg:** Først kaster vi en terning mange ganger. Når du kaster første gang, har du seks utfall. Kaster du engang til, har du seks utfall for hvert utfall i forrige kast, altså trettiseks. Kaster du enda en gang, har du seks nye utfall for hvert av de trettiseks forrige, altså 216. Hvis terningen har $n$ sider, og du kaster $r$ ganger, får du $n^r$ utfall.
**Ordnet utvalg med tilbakelegg:** Sett at man skal velge et styre på tre mennesker fra en forsamling med 30 medlemmer. Når man først velger lederen, kan man velge blant alle de 30 medlemmene i forsamlingen. Nestleder kan så velges blant de 29 resterende medlemmene. For hvert valg av leder har man altså 29 muligheter for å velge nestleder. Det blir $30 \cdot 29$ mulige kombinasjoner. For hver av disse $30 \cdot 29$ kombinasjonene har man så 28 muligheter til å velge sekretær. Så da er vi oppe i $30 \cdot 29 \cdot 28$ mulige kombinasjoner. Dersom man skal velge et styre på 6 mennesker av en forsamling på 34, har man

$$34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 = \frac{34!}{28!} = \frac{34!}{(34-6)!}$$

forskjellige kombinasjoner. Husk at

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Uttales '$n$ fakultet'.
**Uordnet utvalg uten tilbakelegg:** I forrige avsnitt hadde rekkefølgen på uttrekket noe å si, siden alle styrer med de samme menneskene i forskjellige verv ble telt med. Vi omdanner nå de seks personene i avsnittet til lottokuler, slik at rekkefølgen på uttrekket ikke har noe å si; alle vet at lottokuler trekkes ut og organiseres i stigende rekkefølge til slutt. Seks nummererte kuler kan ordnes i rekkefølge på $6! = 720$ forskjellige måter. Dersom vi ikke er interessert i rekkefølgen, må denne interne organiseringen deles ut, og det finnes derfor

$$\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{30!}{27! \cdot 3!}$$

forskjellige utvalg. Dette tallet kalles **binomialkoeffisient**, og har en spesiell notasjon. Vi definerer

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

som altså er antall måter å plukke ut $r$ elementer av en samling på $n$ elementer når rekkefølgen ikke spiller noen rolle.