Sammenheng mellom diskrete og kontinuerlige variable

Det er egentlig matematisk unødvendig med noe skille mellom diskrete og kontinuerlige stokastiske variable, men man gjør det allikevel av pedagogiske grunner. Hvis du triller en terning, må den lande på en av de seks sidene, og alle barn i barnehagen forstår at sannsynligheten er 1/6 for at den lander på en bestemt side. Hvis man derimot skulle starte med den kontinuerlige stokastiske variabelen x, definert $i - 1/2 < x < i + 1/2 = i$ øyne, sannsynlighetstetthetsfunksjonen $f(x) = 1/6$, og definert

$$\begin{aligned} P(i \text{ øyne}) &= P(i - 1/2 < x < x + 1/2) \\ &= \int_{i-1/2}^{i+1/2} f(x)\, dx = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

ville mange falt av lasset ganske fort. Men får fint å gjøre det, og således er diskrete variable kun spesialtilfeller av de kontinuerlige.

Regneregler for forventning og varians

Vi kommer til å trenge noen viktige regneregler for forventning og varians. De to første er

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

og

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

Bevisene for disse er trivielle, både for diskrete og kontinuerlige variable. Tilsvarende formler

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

og

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

gjelder for variansen. Vi beviser den første for det kontinuerlige tilfellet. La $\mu = E(X)$,.Da blir $a\mu + b = E(aX + b)$, og

$$\begin{aligned} Var(aX + b) &= \int_\Omega (ax + b - a\mu - b)^2 f(x)\, dx \\ &= a^2 \int_\Omega (x - \mu)^2 f(x)\, dx \\ &= a^2 Var(X). \end{aligned}$$

Til slutt en formel som kan være grei å bruke i blant

$$Var(X) = (E(X - \mu)^2) = E(X^2) - \mu^2.$$

Sentralgrenseteoremet

Dersom X_1, X_2,...,X_n er identisk fordelte variable med forventning μ og standardavvik σ, er

$$X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_n$$

normalfordelt med forventning μ og standardavvik $\sigma/\sqrt{n}$.

Binomisk og normal

Dersom n er stor, er binomisk fordeling tilnærmet normalfordelt med $\mu = np$ og $\sigma = np(1 - p)$. Dette er nyttig dersom du ønsker å finne kumulative binomiske sannsynligheter, og ikke kan programmere.

Binomisk og poisson

Hvis man lar $p \to 0$ og $n \to \infty$ mens np er konstant, vil binomisk fordeling $\to$ poissonfordelingen.

Poisson og eksponensialfordelingen