Et par praktiske saker

1) Angående øvingstimer, gjelder KJEMI/MATERIAL og OLJE/GASS: sjekk timeplan for øvingstidspunkt

2) Referansegruppemøte onsdag: meld inn saker til referansegrupperepresenanter

FF-90

3.8: Poisson-fordelingen

- Gitt at en hendelse i gjennomsnitt inntreffer λ ganger i løpet av et intervall (tid/rom), og la X angi antall ganger hendelsen inntreffer.
- Under følgende 3 forutsetninger er X Poisson-fordelt:
    1) sanns. for at hendelsen skal inntreffe er uavhengig av hvorvidt hendelsen har inntruffet tidligere
    2) sanns. for at hendelsen skal inntreffer er konstant over intervallet
    3) to hendelser kan ikke overlappe

- Hvis X er Poisson-fordelt, er

$$\boxed{P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}}$$

- finnes ingen enkel formel for kumulativ sanns. for Poisson-fordeling,dvs. $P(X \leq x)$; bruker kalkis/tabeller for denne

- sammenhengen mellom intensiteten α av hendelser (antall hendelser per tid) og det forventede antall hendelser λ i løpet av en tid t er gitt ved

$$\boxed{\lambda = \alpha t}$$

Eksempel
La X angi antall mottatte SMS per dag for en student. X kan antas Poisson-fordelt med forventningsverdi λ.

Hvor mange SMS må studenten motta i gjennomsnitt per dag for at det skal være 99,9 % sannsynlig at studenten mottar minst én SMS på en tilfeldig dag?

Svar: skal bestemme λ slik at

$$P(X \geq 1) = 0{,}999$$

$$1 - P(X = 0) = 0{,}999$$

$$1 - \frac{\lambda^0 \cdot e^{-\lambda}}{0!} = 0{,}999$$

$$1 - e^{-\lambda} = 0{,}999$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda} = 1 - 0{,}999 = 0{,}001$$

$$\ln e^{-\lambda} = \ln 0{,}001$$

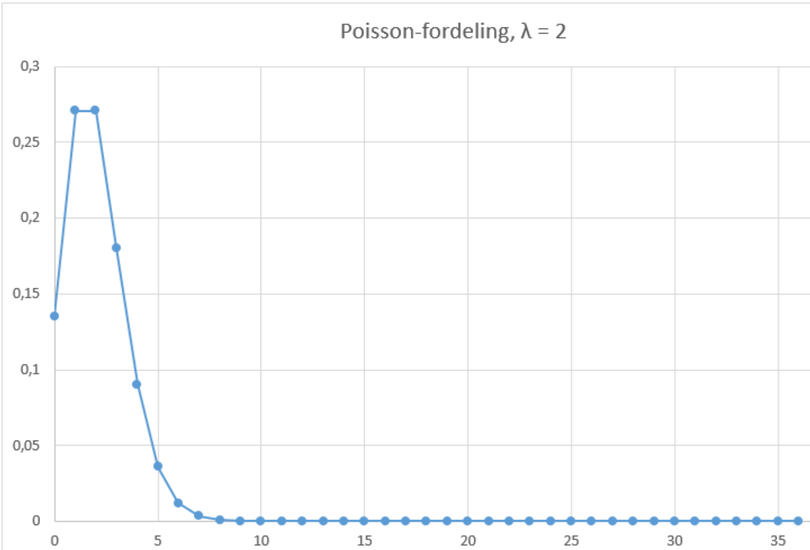
$$-\lambda \ln e = \ln 0{,}001$$

$$\lambda = -\ln 0{,}001$$

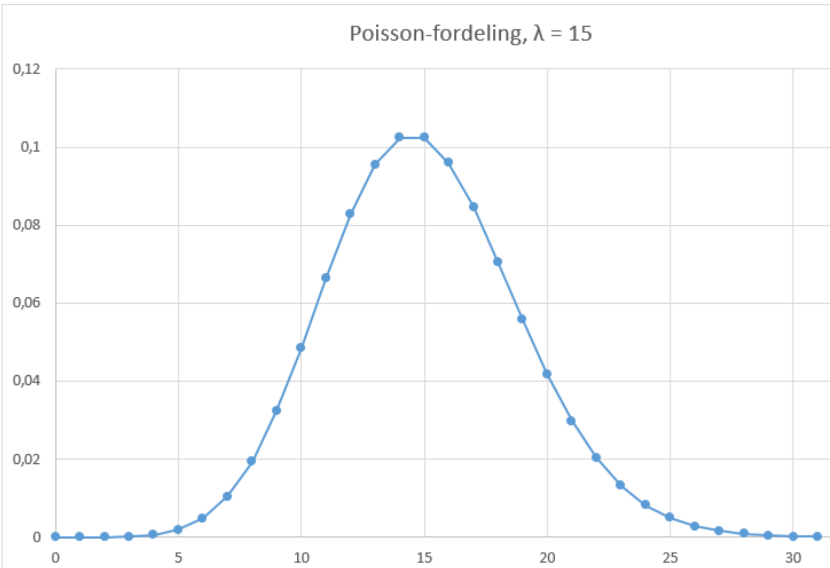
$$\approx \underline{\underline{6{,}9}}$$

Hvordan ser en Poisson-fordeling ut?

Gitt en λ, tabulerer vi punktsannsynlighetene $P(X=x)$ for et utvalg x og skisserer disse grafisk i Excel.



"lite gjennomsnitt", $\lambda = 2$



"stort gjennomsnitt", $\lambda = 15$

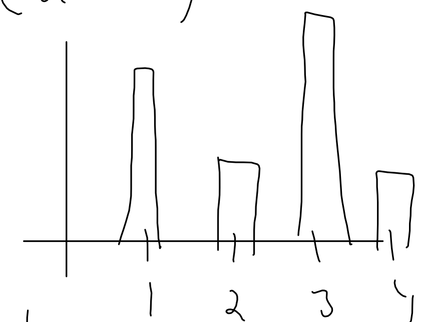
Kap. 4: Kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger

4.1: Generelt snikksnakk

! Ur-viktig: forskjellen mellom diskrete og kontinuerlige stokastiske variable og sannsynlighetsfordelinger

Diskret

- "tellevariabler", $X=1,\ X=2,\ X=3, \dots$
- binomisk, Poisson
- punktsannsynlighet $P(X=x)$

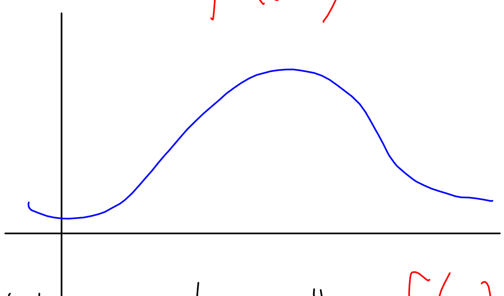


Histogram for $P(X=x)$

$$\sum_{\text{alle } x} P(X=x) = 1$$

Kontinuerlig

- Kan ha en hvilken som helst verdi på et interval, f.eks. $[0, 100]$
- eksempler: levetid til komponent, høyde på person
- bruker ikke punktsannsynlighet, har istedet sannsynlighetstetthet $f(x)$



Eksempel på $f(x)$

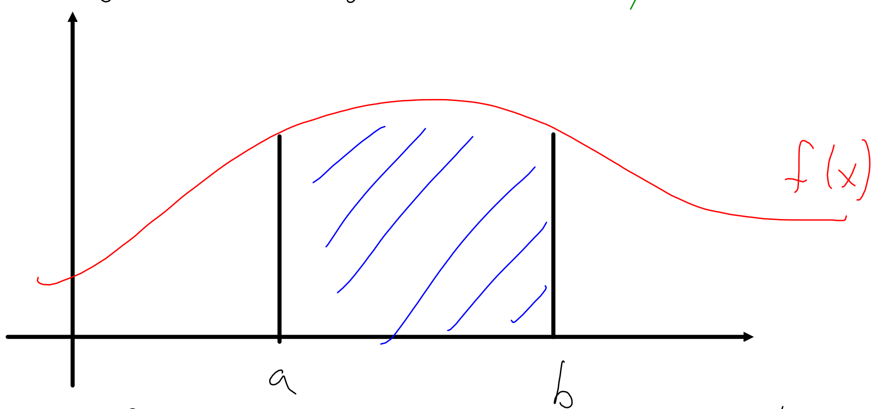
$$\int_{\text{alle } x} f(x)\, dx = 1$$

Kumulativ fordeling for kontinuerlige variable

– den kumulative fordelingen til en kontinuerlig variabel X, kalles fordelingsfunksjonen $F(x)$,

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Sammenhengen mellom sannsynlighetstettheten $f(x)$ og fordelingsfunk. $F(x)$



Sanns. for at X ligger i intervallet $a \leq X \leq b$ er

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Sier du det, ja!

$$= P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

$$= F(b) - F(a)$$

Greia: fordelingsfunksjoner finner vi typisk på et formelark.

4.2: Eksponentialfordelingen

- første eksempel på kontinuerlig fordeling
- eksempel: levetid til lyspære modelleres bra ved eksponentialfordelingen
- utgangspunkt: Poisson-prosess med intensitet α (antall hendelser per tidsenhet)
- variabelen i eksp. ford. kalles T
- eksp. ford. brukes til å bestemme sannsynligheten for at den første hendelsen i Poisson-prosessen skjer innen en viss tid t

inntreffer for første gang

$t=0$ $\quad P(T \leq t)$ gir $\quad t$

Sanns. for at hendelsen inntreffer innen tid t

Eksponentialfordelingen:

$$\boxed{f(t) = \alpha e^{-\alpha t}}$$

Sannsynlighetstettheten

$$\boxed{F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\alpha t}}$$

Kumulativ ford./fordelingsfunksjon

Fra eksamen desember 2016

Oppgave 3

Antallet studenter på kontoret til en statistikklærer i løpet av en time, i tiden før eksamen, er Poissonfordelt med forventningsverdi lik 4 studenter.

a) Hva er sannsynligheten for det kommer flere enn 2 studenter i løpet av en time?

La så T angi tiden fra læreren kommer på kontoret om morgenen, til første student ankommer.

b) Hva er sannsynligheten for at det tar mer enn 30 minutter til første student ankommer?

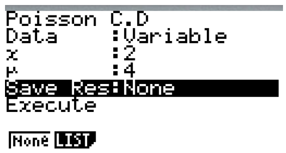
Svar:

a) La X angi antall studenter på kontoret i løpet av en time. Her er $\lambda = 4$. Skal finne

$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2)$$

$$= 1 - 0{,}238$$

$$= \underline{\underline{0{,}762}}$$



b) Her er intensiteten $\alpha = 4 \frac{\text{studenter}}{\text{time}}$

$$= 4 \frac{\text{studenter}}{60 \text{ min}} = \underline{\frac{1}{15} \frac{\text{studenter}}{\text{min}}}$$

Skal finne $P(T > 30)$, der T er en eksponential fordelt var. med $\alpha = \frac{1}{15}$ og vi måler tiden i minutter.

$$P(T > 30) = 1 - P(T \le 30)$$

motsats

$$= 1 - \left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

$$= e^{-\alpha \cdot t}$$

$$= e^{-\frac{1}{15} \cdot 30}$$

$$= e^{-2}$$

$$\approx \underline{\underline{0{,}135}}$$

Eksempel (fra eksamen juni 2014)

Oppgave 3

Antall kunder som ankommer en butikk i løpet av et tidsrom antas å være Poissonfordelt med en intensitet på 16 kunder i timen.

a) Finn sannsynligheten for at det kom minst 6, men høyst 12, kunder i løpet av en halv time.

b) Finn sannsynligheten for at det tar minst 10 minutter før første kunde kommer.

Svar:

a) La X være antall kunder i løpet av en time. Her er $\alpha = 16 \frac{\text{kunder}}{\text{time}}$. I løpet av halv time er forventet antall lik

$$\lambda = \alpha \cdot t$$

$$= 16 \frac{\text{kunder}}{\text{time}} \cdot \frac{1}{2} \text{ time}$$

$$= \underline{8}$$

Skal finne

$$P(6 \leq X \leq 12)$$

$$= P(X \leq 12) - P(X \leq 5)$$

$$= \ldots$$