

Institutt for matematiske fag

## Eksamensoppgave i **ST1201/ST6201** Statistiske metoder

**Faglig kontakt under eksamen:** Nikolai Ushakov

**Tlf:** 45128897

**Eksamensdato:** 20. desember 2016

**Eksamenstid (fra–til):** 09:00 – 13:00

**Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:** C:

- Tabeller og formler i statistikk, Tapir forlag,
- K.Rottman. Matematisk formelsamling,
- Ett gult ark (A4 med stempel) med egne håndskrevne formler og notater,
- Kalkulator: HP30S, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College eller Casio fx-82ES PLUS.

**Annen informasjon:**

Sensur:

**Målform/språk:** bokmål

**Antall sider:** 3

**Antall sider vedlegg:** 0

**Kontrollert av:**

<b>Informasjon om trykking av eksamensoppgave</b>	
<b>Originalen er:</b>	
<b>1-sidig</b> <input type="checkbox"/>	<b>2-sidig</b> <input checked="" type="checkbox"/>
<b>sort/hvit</b> <input checked="" type="checkbox"/>	<b>farger</b> <input type="checkbox"/>
<b>skal ha flervalgskjema</b> <input type="checkbox"/>	

\_\_\_\_\_

Dato

\_\_\_\_\_

Sign



## Oppgave 1

I et laboratorium brukes et løsningsmiddel som skal ha  $pH = 7.45$ . Det tas  $n$  prøver av et parti av løsningsmiddelet, og i hver prøve måles  $pH$ . Målingene,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , er uavhengige og normalfordelte med forventningsverdi  $\mu$ , som er  $pH$  i løsningsmiddelet, og standardavvik 0.05 (som skyldes måleusikkerhet).

En utfører en hypotesetest med nullhypotese  $\mu = 7.45$  mot den alternative hypotesen  $\mu > 7.45$ . Hvis nullhypotesen forkastes med signifikansnivå 0.05, kasseres partiet.

- Foreslå hvordan en slik hypotesetest basert på gjennomsnittet  $\bar{X}$  av målingene kan gjennomføres. Hva blir konklusjonen hvis det tas  $n = 20$  prøver og gjennomsnittet av målingene er 7.47?
- Hva er sannsynligheten for at nullhypotesen blir forkastet hvis det tas  $n = 20$  prøver og  $pH$  i løsningsmiddelet er  $\mu = 7.47$ ?
- Anta at  $pH$  i løsningsmiddelet er  $\mu = 7.47$ . Hvor mange prøver,  $n$ , må tas for at sannsynligheten for at nullhypotesen forkastes skal være større enn 0.8?

## Oppgave 2

La  $X_1, X_2, \dots, X_n$  være et tilfeldig utvalg fra en normalfordeling med (kjent) forventning  $E(X_i) = 1$  og (ukjent) varians  $\text{Var}(X_i) = \theta$ . Man ønsker å benytte de observerte verdier til å teste

$$H_0 : \theta = 1 \quad \text{mot} \quad H_1 : \theta \neq 1.$$

- a) Bruk

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2$$

som testobservator og bestem en beslutningsregel for når man skal forkaste  $H_0$ . Benytt signifikansnivå  $\alpha$ .

Utled styrkefunksjonen for denne testen.

- b) Finn sannsynlighetskvote (generalised likelihood ratio (GLR)),  $\lambda$ , for  $H_0$  og  $H_1$  som angitt over.

Forklar hvorfor testen du utledet i punkt a) ikke er en sannsynlighetskvote test (generalised likelihood ratio test (GLRT)).

**Oppgave 3**

På et laboratorium undersøkes sammenhengen mellom reaksjonsfart  $Y$  (i mikromol pr. time) og konsentrasjonen  $x$  (i mikromol pr.  $\text{dm}^3$ ) av en katalysator. Det gjøres 10 målinger av reaksjonsfart  $Y_i$  og konsentrasjon  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq 10$ . Anta at parene av målinger er uavhengige, og at  $Y_i$  er normalfordelt med forventningsverdi  $\alpha + \beta x_i$  og standardavvik  $\sigma$ , der  $\alpha$ ,  $\beta$  og  $\sigma$  er ukjente parametre.

- a) Forklar kort hva minste kvadraters metode for estimering av  $\alpha$  og  $\beta$  går ut på.

Ved minste kvadraters metode blir  $\beta$  estimert til 1.12. Variansen  $\sigma^2$  blir estimert til 2.3, og

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 4.1$$

(det vil si at  $2.3/4.1$  er et estimat av variansen til estimatoren til  $\beta$ )

- b) Utfør en hypotesetest for å undersøke om det er noen sammenheng mellom  $x$  og  $Y$ . Bruk signifikansnivå 0.05.

**Oppgave 4**

I denne oppgaven skal vi se på en regresjonsmodell som er noe modifisert i forhold til den som er behandlet i læreboka. Anta at vi har variabelpar  $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$  der  $x_1, \dots, x_n$  ikke betraktes som stokastiske, mens  $Y_1, \dots, Y_n$  antas å være uavhengige stokastiske normalfordelte variabler med

$$E(Y_i) = \alpha + \beta(x_i - \bar{x}) \text{ og } \text{Var}(Y_i) = \sigma_0^2.$$

Her er  $\bar{x} = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i$ , verdiene til de to parametrene  $\alpha$  og  $\beta$  antas ukjente, mens variansen  $\sigma_0^2$  antas å ha en kjent verdi.

- a) Utled sannsynlighetsmaksimeringsestimatorene (SME) for  $\alpha$  og  $\beta$  og vis spesielt at estimatoren for  $\beta$  kan skrives på formen

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) Y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Vis at variansen til  $\hat{\beta}$  kan skrives på formen

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

b) Hvilken sannsynlighetsfordeling har  $\hat{\beta}$ ? Begrunn svaret.

Utled et  $(1 - \delta) \cdot 100\%$  konfidensintervall for  $\beta$ .

### Oppgave 5

Følgende tabell er en delvis utfylt variansanalysetabell (ANOVA-tabell) hvor noe informasjon mangler (stjerner).

Source	df	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>
Treatment	*	24.48	8.16	*
Error	40	*	5.1	
Total	*	*		

a) Finn tallene som mangler og skriv opp den fullstendige ANOVA-tabellen. Vis hvordan du beregner verdiene der det står \* i tabellen.

Utfør hypotesetesten for

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4.$$

Signifikansnivået er  $\alpha = 0.05$ .