Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Brukerkurs i statistikk, ST0103

13. august, 2012

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) La M og F betegne hendelse at vi har trukket henholdsvis en hann og en hun og la X være kroppsvekten.

$$P(X > 108|F) = P(\frac{X-100}{5} > \frac{108-100}{5}|F) = 1 - G(8/5) = 0.0548. \tag{1}$$

b)

$$\begin{aligned} P(X > 108|X > 100, F) &= \frac{P(X > 108 \cap X > 100|F)}{P(X > 100|F)} \\ &= \frac{P(X > 108|F)}{P(X > 100|F)} \\ &= 0.0548/0.5 = 0.1096. \end{aligned} \tag{2}$$

c) For hanner får vi

$$P(X > 108|M) = 1 - G((108-110)/5) = 1 - G(-2/5) = 0.6554. \tag{3}$$

I følge Bayes teorem er da

$$\begin{aligned} P(M|X > 108) &= \frac{P(X > 108|M)P(M)}{P(X > 108|M)P(M) + P(X > 108|F)P(F)} \\ &= \frac{0.6554 \cdot 0.5}{0.6554 \cdot 0.5 + 0.0548 \cdot 0.5} \\ &= 0.910 \end{aligned} \tag{4}$$

d) La Y betegne antall individ som veier mer enn 108 gram. Hvert individ har, i følge lov om total sannsynlighet, samme sannsynlighet

$$\begin{aligned} p = P(X > 108) &= P(X > 108|M)P(M) + P(X > 108|F)P(F) \\ &= (0.6554 + 0.0548)/2 = 0.3601 \end{aligned} \tag{5}$$

for å veie mer enn 108 gram. Videre er delforsøkene uavhengig slik at Y er binomisk fordelt med parameter $n = 70$ og $p = 0.3601$. Bruker vi normaltilnærming til binomisk fordeling finner og heltallskorreksjon finner vi at

$$P(Y \geq 35) \approx P(Y > 34.5) \approx P(Z > \frac{34.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}) = 0.01033. \tag{6}$$

Oppgave 2

a) For at f skal være en sannsynlighetstetthet må

$$f(x) \geq 0 \tag{7}$$

for alle x og

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{8}$$

Når

$$0 < x < a \tag{9}$$

er

$$\begin{aligned} 0 &> -\frac{x}{a} > -1 \\ 1 &> 1 - \frac{x}{a} > 0 \\ \frac{2}{a} &> f(x) > 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Når $f(x) = 0$ for andre x er altså er (7) oppfyllt.

Videre blir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \frac{2}{a}\int_0^a 1 - \frac{x}{a}dx \\ &= \frac{2}{a}\left[x - \frac{x^2}{2a}\right]_0^a = \frac{2}{a}(a - a/2) = 1, \end{aligned} \tag{11}$$

slik at også (8) er oppfyllt.

b) Den stokastiske variabelen Y har kumulativ fordeling

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y) = P(X \leq y^2) = F_X(y^2). \tag{12}$$

Deriverer vi med hensyn på y får vi at sannsynlighetstettheten til y blir

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X(y^2) = f_x(y^2)2y = \frac{4y}{a}(1 - \frac{y^2}{a}) \tag{13}$$

for $0 < y < \sqrt{a}$ og 0 for andre y.

Oppgave 3

a) Når gjenfangstutvalget er foretatt med tilbakelegging er X binomisk fordelt med parametere n og $p = m/N$.

Observerer vi $X = x$ merkede individ i gjenfangsutvalget blir likelihoodfunksjonen

$$L(p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \tag{14}$$

og log-likelihoodfunksjonen

$$\ln L(p) = C + x \ln p + (n - x) \ln(1 - p), \tag{15}$$

hvor C er en konstant som ikke avhenger av p. I maksimum er

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \ln L(p) &= 0 \\ \frac{x}{n} - \frac{n-x}{1-p} &= 0 \\ p &= x/n \end{aligned} \tag{16}$$

slik at SME av p er $\hat{p} = X/n$.

b) Punktestimatet av p blir $\hat{p} = 5/20 = 0.25$ og et 95%-konfidensintervall blir

$$\begin{aligned} &(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}, \hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}) \\ &(0.25 - 1.96\sqrt{0.25 \cdot 0.75/20}, 0.25 + 1.96\sqrt{0.25 \cdot 0.75/20}) \\ &(0.0602, 0.4398). \end{aligned} \tag{17}$$

c) Siden $p = m/N$ blir $N = f(p) = m/p$. Funksjonell invarians til sannsynlighetsmaksimeringsestimator medfører da at SME av N, $\hat{N}$, er samme funksjon av SME av p, d.v.s. $\hat{N} = f(\hat{p}) = m/\hat{p} = 20/0.25 = 80$.

d) Vi transformerer konfidensintervallet for p til et konfidensintervall for N ved hjelp av f. Siden f er strengt avtagende blir et 95%-konfidensintervall for N blir $f(0.4398), f(0.0602) = (20/0.4398, 20/0.0602) = (45.47, 332, 09)$.