Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Brukerkurs i statistikk, ST0103

3. desember 2010

Oppgave 1

a) I oppgaven er det gitt at *endringen* X i "gjennomsnittstemperatur" er normalfordelt. At "gjennomsnittstemperaturen" da *avtar* innebærer da at denne endringen er negativ, d.v.s hendelsen $X < 0$ som har sannsynlighet

$$P(X < 0) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{0-\mu}{\sigma}) = G(-2.5/1.5) = 0.0478.$$

b) Det "forutsettes" at "gjennomsnittstemperaturen" øker. Det er så spurt om hva sannsynligheten for hendelsen $X > 4$ *da* er. Vi er m.a.o. ute etter en *betinget* sannsynlighet

$$\begin{aligned} P(X > 4|X > 0) &= \frac{P(X > 4)}{P(X > 0)} \\ &= \frac{1 - P(X < 4)}{1 - P(X < 0)} = \frac{1 - G((4-2.5)/1.5)}{1 - 0.0478} \\ &= 0.167. \end{aligned}$$

c) Hjelpesetning for varians gir at $E(X^2) = \operatorname{Var} X + (EX)^2 = \sigma^2 + \mu^2$ slik at

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(a(X - x_0)^2) \\ &= aE(X^2 - 2x_0X + x_0^2) \\ &= a(\sigma^2 + \mu^2 - 2x_0\mu + x_0^2 \\ &= a(\sigma^2 + (\mu - x_0)^2) \\ &= 500 \cdot 10^9(1.5^2 + (2.5-1)^2)kr \\ &= 2250 \text{ milliarder kr.} \end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Likelihoodfunksjonen blir

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta y_i^2} e^{-\frac{1}{\beta y_i}} = \beta^{-n} e^{-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}} \prod_{i=1}^{n} y_i^{-2}.$$

og log-likelihoodfunksjonen

$$\ln L(\beta) = -n \ln \beta - \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i} - 2\sum_{i=1}^{n} \ln y_i.$$

Denne har sitt maksium der

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} \ln L(\beta) &= 0 \\ -\frac{n}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i} &= 0 \\ \hat{\beta} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i} \end{aligned}$$

som betyr at SME av β er

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{Y_i}$$

b) Kumulativ tetthet til X blir

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(1/Y \leq x) \\ &= P(Y \geq 1/x) \\ &= 1 - F_Y(1/x). \end{aligned}$$

Deriverer vi med hensyn på x får vi at

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}(1 - F_Y(1/x)) = -f_Y(1/x)(-x^{-2}) = \frac{1}{\beta(1/x)^2} e^{-\frac{1}{\beta 1/x}}(-x^{-2}) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta},$$

som er eksponensiell fordeling med parameter $1/\beta$.

c) Siden $1/Y_i$ er eksponentiellt fordelt har $1/Y_i$ forventning β og

$$E(\hat{\beta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\frac{1}{Y_i}) = \frac{1}{n} n\beta = \beta.$$

Oppgave 3

a) Estimatet av stigningstallet blir

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{50}(Y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{50}(x_i - \bar{x})^2} = 10.30/138.8 = 0.0742$$

b) Fra uttrykket ovenfor ser vi at $\hat{\beta}$ er en lineærkombinasjon av normalfordelte variable $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ som medfører at også $\hat{\beta}$ er normalfordelt. Vanlige regneregler for varians til linæerkombinasjoner av uavhengige variable gir at

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\hat{\beta} &= \operatorname{Var}\frac{\sum(x_i - \bar{x})Y_i}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \\
&= \frac{1}{(\sum(x_i - \bar{x})^2)^2}\operatorname{Var}\sum(x_i - \bar{x})Y_i \\
&= \frac{1}{(\sum(x_i - \bar{x})^2)^2}\sum(x_i - \bar{x})^2\operatorname{Var}Y_i \\
&= \frac{1}{(\sum(x_i - \bar{x})^2)^2}\sum(x_i - \bar{x})^2\sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2\sum(x_i - \bar{x})^2}{(\sum(x_i - \bar{x})^2)^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2)}
\end{aligned}$$

c) Av det som er gitt i forrige punkt følger det at testobservatoren

$$Z = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\sigma/\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}}$$

er standard normalfordelt under H_0 slik at vi forkaster hvis $Z > z_\alpha = z_{0.05} = 1.64$. Observert verdi av Z blir

$$\frac{0.0742}{0.2/\sqrt{138.8}} = 4.371.$$

Vi kan dermed forkaste H_0.

d) Teststyrken for $\beta = 0.01$ blir

$$
\begin{aligned}
P(Z > z_\alpha) &= P(\frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\sigma/\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}} > z_\alpha) = P(\hat{\beta} > \beta_0 + z_\alpha \sigma \sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}) \\
&= P(\frac{\hat{\beta} - \beta}{\sigma\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}} > \frac{\beta_0 - \beta}{\sigma\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}} + z_\alpha) \\
&= 1 - G(\frac{\beta_0 - \beta}{\sigma\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}} + z_\alpha) = G(\frac{\beta - \beta_0}{\sigma\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}} - z_\alpha) \\
&= G(\frac{0.01 - 0}{0.2\sqrt{138.8}} - 1.64) = 0.1466.
\end{aligned}
$$