Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Brukerkurs i statistikk, ST0103

7. juni 2010

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) La X være vekten til et tilfeldig valgt individ og M og F hendelsen at et individ er henholdvis hann eller hunn.

$$P(X > 6|M) = P(\frac{X-5}{1} < \frac{6-5}{1}) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 0.1587 \tag{1}$$

b) På tilsvarende måte som i forrige punkt får vi

$$P(X > 6|F) = 0.0228. \tag{2}$$

Lov om totalsannsynlighet gir så at

$$\begin{aligned} P(X > 6) &= P(X > 6|F)P(F) + P(X > 6|M)P(M) \\ &= 0.1587 \cdot 0.2 + 0.0228 \cdot 0.8 = 0.0499 \end{aligned} \tag{3}$$

c) Bayes teorem gir at

$$P(M|X > 6) = \frac{P(X > 6|M)P(M)}{P(X > 6)} = \frac{0.1587 \cdot 0.2}{0.0499} = 0.635. \tag{4}$$

Oppgave 2

a) Antall overlevende individ vil være binomisk fordelt hvis ulike pasienter overlever uavhengig av hverandre og med samme sannsynlighet. I følge vanlig teori for binomisk modell blir estimatet av p, $\hat{p} = X/n = 45/100 = 0.45$. Et estimat av standardfeilen $\mathrm{SD}(\hat{p}) = \sqrt{(}p(1-p)/n)$ er $\widehat{\mathrm{SD}}(\hat{p}) = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} = \sqrt{0.45(1-0.45)/100} = 0.0497$.

b) Om vi betrakter $(\hat{p}-p)/\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$ som tilnærmet normalfordelt blir et 95%-konfidensintervall for p, $\hat{p} \pm z_{0.025}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} = (0.353, 0.547)$.

c) At et individ er i live etter $t = 4r$ er det samme som at levetiden $T > t$. Når levetidene er eksponentiellt fordelte er

$$P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}. \tag{5}$$

Denne hendelsen har sannsynlighet p. Dermed er

$$p = e^{-\lambda t} \tag{6}$$

og

$$\lambda = -\frac{1}{t}\ln(p). \tag{7}$$

Intervallgrensensene i et konfidensintervall for λ er samme funksjon av intervallgrensene for p, altså er

$$(-\frac{1}{t}\ln(0.353), -\frac{1}{t}\ln(0.547)) = (0.151, 0.261) \tag{8}$$

et 95%-konfindensintervall for dødsraten λ.

Oppgave 3

a) Tettheten

$$f(x) = \frac{1}{2\beta^3}x^2 e^{-x/\beta} \tag{9}$$

er gammafordeling med formparameter $\alpha = 3$ og skalaparameter $\lambda = 1/\beta$. Fra teori for gammafordeling finner vi da

$$EX = \frac{\alpha}{\lambda} = 3\beta, \tag{10}$$

og

$$\operatorname{Var} X = \frac{\alpha}{\lambda}^2 = 3\beta^2, \tag{11}$$

b) Likelihoodfunksjonene blir

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\beta^3}x_i^2 e^{-x_i/\beta} = \frac{1}{2^n\beta^{3n}}e^{-\frac{1}{\beta}\sum x_i}\prod x_i^2. \tag{12}$$

og log-likelihoodfunksjonen blir

$$\ln L(\beta) = -n\ln 2 - 3n\ln\beta - \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i + 2\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \tag{13}$$

I maksimum er

$$\frac{d}{d\beta} \ln L(\beta) = 0 \tag{14}$$

slik at

$$-\frac{3n}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \tag{15}$$

og

$$\beta = \frac{\sum x_i}{3n}. \tag{16}$$

SM-estimator av β er

$$\hat{\beta} = \frac{\sum X_i}{3n}. \tag{17}$$

c) Siden hver X_i har forventning $E(X_i) = \alpha/\lambda = 3\beta$ blir

$$E(\hat{\beta}) = \frac{1}{3n} n E(X_i) = \frac{1}{3n} n 3\beta = \beta, \tag{18}$$

slik at β altså er forventningsrett.

d) Variansen blir

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \mathrm{Var}(\frac{\sum X_i}{3n}) = \frac{1}{9n^2} \mathrm{Var}(\sum X_i) = \frac{1}{9n^2} n \,\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{9n^2} n 3\beta^2 = \frac{\beta^2}{3n}. \tag{19}$$