Torsdag 6. august

System av differensialligninger

Når vi har én differensialligning med initialbetingelse på formen

$$x'(t) = ax(t), \quad a \in \mathbb{R}$$
$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$$

så har vi løsningen

$$x(t) = e^{at} x_0 .$$

Vi ser på følgende system av differensialligninger

$$\star \quad \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

Vi lar $\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$, så $\bar{x}'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}$,

og definerer $(n \times n)$-matrisen $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Da har vi at $\star$ kan beskrives som en matriseligning: $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t)$

Hvis vi har en initialbetingelse for ★,

$$x_1(0) = y_1,\ x_2(0) = y_2,\ \dots,\ x_n(0) = y_n \in \mathbb{R}$$

kan vi sette $\bar{x}(0) = \bar{x}_0 = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.

Det viser seg at den unike løsningen av

$$\begin{cases} \bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) \\ \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \end{cases}$$ er $\bar{x}(t) = e^{At}\bar{x}_0$.

Men hva er e^{At} for en matrise A?

Matriseeksponenter

Taylorutviklingen til e^{at} for $a, t \in \mathbb{R}$ er

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \dots$$

Definisjon La A være en $(n \times n)$-matrise.

Matriseeksponenten til A er

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

For $A = \bar{0}$, $e^{\bar{0}} = I_n$.

Vi vet at A^k kan være tungt å regne ut, med mindre vi dekomponerer A.

Eksempel La $A = \lambda I_n$ for $\lambda \in \mathbb{R}$. Siden $A^k = \lambda^k I_n$, får vi

$$e^A = e^{\lambda I_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda I_n)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} I_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) I_n = e^{\lambda} I_n$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda} \end{bmatrix}$$

($I_n^k = I_n$)

Teorem La A og B være $(n \times n)$-matriser som kommuterer ($AB = BA$).

1) $Ae^B = e^B A$

2) $e^A e^B = e^{A+B}$

3) $e^A e^B = e^B e^A$

4) e^A er inverterbar, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

5) $f(t) = e^{At}$, $\frac{d}{dt} f(t) = Ae^{At} = e^{At} A$.

Bevis

1) oppgave

2) $e^A e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{A^j}{j!} \frac{B^{k-j}}{(k-j)!}$ (cauchy-produktet)

Binomialformelen → $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!}$

$= e^{A+B}$

3) oppgave

4) oppgave

5) $\frac{d}{dt}(e^{At}) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}\right) = \frac{d}{dt}\left(I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}\right)$

$= \frac{d}{dt}(I_n) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \frac{d}{dt}(t^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k k t^{k-1}}{k!}$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(At)^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$

$= Ae^{At} = e^{At} A$.

↑ 1)

Verktøykasse

- Cauchy-produkt: For rekker $C = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$, $D = \sum_{k=0}^{\infty} D_k$

$$CD = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} c_j D_{k-j}$$

- Binomialformelen:

$$(C+D)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} C^j D^{k-j}$$

for $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$

Teorem La A være en $(n \times n)$-matrise og $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Da har $\begin{cases} \bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) \\ \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \end{cases}$ en unik løsning:

$$\bar{x}(t) = e^{At}\bar{x}_0 .$$

Bevis

Siden $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$ har vi at $\bar{x}'(t) = \frac{d}{dt}(e^{At}\bar{x}_0)$

$= Ae^{At}\bar{x}_0$

$= A\bar{x}(t)$ ✓

og $\bar{x}(0) = e^{A\cdot 0}\bar{x}_0 = e^{\bar{0}}\bar{x}_0 = I_n\bar{x}_0 = \bar{x}_0$ ✓

Unikhet La $\bar{y}(t)$ være en annen løsning, altså

$\bar{y}'(t) = A\bar{y}(t)$ og $\bar{y}(0) = \bar{x}_0$.

Definer $\bar{z}(t) = e^{-At}\bar{y}(t)$. $\bar{z}(t)$ må være konstant

fordi $\bar{z}'(t) = \bar{0}$ for alle t:

$$\bar{z}'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{-At}\right)\bar{y}(t) + e^{-At}\bar{y}'(t) = -Ae^{-At}\bar{y}(t) + Ae^{-At}\bar{y}(t)$$

$$= \bar{0}.$$

$\hookrightarrow$ $e^{-At}\bar{y}(t) \overset{t=0}{=} e^{\bar{0}}y(0) = \bar{x}_0$

$$\underbrace{\left(e^{-At}\right)^{-1}e^{-At}}_{=I_n}y(t) = \left(e^{-At}\right)^{-1}\bar{x}_0$$

$$\left(e^{-At}\right)^{-1} = e^{At}$$

$$y(t) = e^{At}\bar{x}_0 = x(t).$$

Eksempler

1) $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $At = \operatorname{diag}(\lambda_1 t, \dots, \lambda_n t)$

$$e^{At} = \sum_{k\geq 0} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \operatorname{diag}\left(\frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}, \dots, \frac{(\lambda_n t)^k}{k!}\right)$$

$\operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^k = \operatorname{diag}(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)$

$$= \operatorname{diag}\left(\sum_{k\geq 0} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}, \dots, \sum_{k\geq 0} \frac{(\lambda_n t)^k}{k!}\right)$$

$$= \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

2) $A = N$ er nilpotent (2x2)-matrise ($N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}$)

$$e^{Nt} = \sum_{k\geq 0} \frac{(Nt)^k}{k!} = I_2 + Nt$$

3) $A = J = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda I_2 + N$

Fra eksempel 1) og 2) over

$$e^{Jt} = e^{\lambda t I_2 + tN} = e^{\lambda t I_2}\, e^{Nt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} (I_2 + Nt)$$

I_2 og N kommuterer

$$= e^{\lambda t} I_2 (I_2 + Nt) = e^{\lambda t}(I_2 + Nt)$$

$$= e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4) Hvis $A = PBP^{-1}$

$$e^{At} = \sum_{k\geq 0} \frac{(P(Bt)P^{-1})^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{P(Bt)^k P^{-1}}{k!} = P\left(\sum_{k\geq 0} \frac{(Bt)^k}{k!}\right) P^{-1}$$

$$= Pe^{Bt}P^{-1}$$

$(P(Bt)P^{-1})^k = P(Bt)^k P^{-1}$

Eksempel Finn løsningen til

$$\star \quad \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + \frac{7}{2}x_2(t), & x_1(0) = 1 \\ x_2'(t) = \frac{1}{2}x_2(t), & x_2(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vi konverterer til matriselikning $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t)$, $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$

og ser at $A = \begin{bmatrix} 1 & 7/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ og $\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$.

A er ikke diagonalmatrise, men vi husker at A er diagonaliserbar

$A = PDP^{-1}$, hvor $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Siden $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} = P\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}P^{-1}$

$= \begin{bmatrix} e^t & -7e^{\frac{1}{2}t} \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} e^t & -7e^{\frac{1}{2}t} \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 7(e^t - e^{\frac{1}{2}t}) \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}$

er løsningen $x(t) = e^{At}\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} e^t & 7(e^t - e^{\frac{1}{2}t}) \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2}e^t - \frac{7}{2}e^{\frac{1}{2}t} \\ \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}$

Med andre ord,

$$x_1(t) = \frac{9}{2}e^t - \frac{7}{2}e^{\frac{1}{2}t}$$
$$x_2(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}$$

← sjekk at disse løser ⋆

Eksempel Finn løsningen til $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t)$, $\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

for $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Egenverdier $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (2-\lambda)(-2-\lambda) + 4 = \lambda^2$

så den eneste egenverdien til A er $\lambda = 0$.

Da må A være nilpotent! Vi slipper derfor å dekomponere A.

Dobbeltsjekk: $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}$

Så, ja A er nilpotent.

Så $e^{At} = I_2 + At = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2t & -2t \\ 2t & -2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t+1 & -2t \\ 2t & -(2t-1) \end{bmatrix}$

og løsningen er

$$\bar{x}(t) = e^{At}\bar{x}(0) = e^{At}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t+1 & -2t \\ 2t & 1-2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2t+2 \\ 2t+1 \end{bmatrix}$$

Oppskrift

For $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t)$, $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ med løsning $x(t) = e^{At}\bar{x}_0$

Steg

1) Hvis $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Rightarrow x(t) = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})\,\bar{x}_0$

2) Hvis A ikke er diagonalmatrise, sjekk egenverdiene.

2.1) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ er ulike $\Rightarrow$ A er diagonaliserbar

$A = PDP^{-1}$

$$x(t) = e^{At}\bar{x}_0 = P\,\text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})\,P^{-1}$$

2.2) Hvis den eneste egenverdien er $\lambda = 0$, A er nilpotent (la oss si $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$)

$$x(t) = e^{At}\bar{x}_0 = (I_2 + At)\bar{x}_0 = \bar{x}_0 + tA\bar{x}_0$$

2.3) Hvis (noen eller) alle egenverdier er like $\Rightarrow$ Jordan-form.

For A (2x2)-matrise og $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $A = PJP^{-1}$

$$x(t) = e^{At}\bar{x}_0 = Pe^{Jt}P^{-1}\bar{x}_0$$

$$= e^{\lambda t}P\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P^{-1}\bar{x}_0$$

Vi har bare sett på Jordan-form av (2x2)-matriser i forkurset

Våpenkappløp

Vi har to land i våpenkappløp og ønsker å modellere hvordan militærutgiftene til land 1, $x_1(t)$, og land 2, $x_2(t)$, utvikler seg over tid.

Land 1 har bedre økonomi enn land 2, og land 2 har høyere krigerånd enn land 1.

Vi har følgende system:

$$x_1'(t) = -3x_1(t) + x_2(t) + 3$$
$$x_2'(t) = 2x_1(t) - 4x_2(t) + 8$$

I dag ($t=0$) er militærutgiftene (konvertert til NOK)

$x_1(0) = 3$, $x_2(0) = 6$ (i billioner).

↳
$$\bar{x}'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}}_{=:A} \bar{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}}_{=:\bar{b}}$$

$\bar{b} \neq \bar{0}$ systemet er inhomogent

$$\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Konverter til homogent system

Siden $\det(A) = 10 \neq 0$ kan vi finne $\bar{x}^*$ slik at

$$A\bar{x}^* + \bar{b} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$A\bar{x}^* = -\bar{b}$$
$$\Uparrow$$
$$\bar{x}^* = -A^{-1}\bar{b}$$

som et likevekts-punkt siden $\dot{x}'(t) = \bar{0}$ betyr at utgiftene ikke øker

$$\bar{x}^* = \frac{-1}{10}\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

$$\bar{u}(t) = \bar{x}(t) - \bar{x}^*$$

$$\hookrightarrow \quad \bar{u}'(t) = A\bar{u}(t)$$
$$u(0) = \bar{x}(0) - \bar{x}^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ved standard metode, finner vi egenverdiene

$\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = -5$ med egenvektorene

$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$, respektivt.

$$\hookrightarrow \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad P = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

og vi har diagonalisasjonen $A = PDP^{-1}$.

Siden

$$e^{At} = P e^{Dt} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \left(\frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2e^{-2t} + e^{-5t} & e^{-2t} - e^{-5t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-5t} & e^{-2t} + 2e^{-5t} \end{bmatrix}$$

har vi

$$u(t) = e^{At} u(0) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2e^{-2t} + e^{-5t} & e^{-2t} - e^{-5t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-5t} & e^{-2t} + 2e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5e^{-2t} - 2e^{-5t} \\ 5e^{-2t} + 4e^{-5t} \end{bmatrix}$$

Tilslutt:

$$x(t) = u(t) + \bar{x}^* = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5e^{-2t} - 2e^{-5t} \\ 5e^{-2t} + 4e^{-5t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Så Land 1: $x_1(t) = \frac{5}{3} e^{-2t} - \frac{2}{3} e^{-5t} + 2$

Land 2: $x_2(t) = \frac{5}{3} e^{-2t} + \frac{4}{3} e^{-5t} + 3$

Vi ser at når $t \to \infty$ så $\lim_{t \to \infty} x_1(t) = 2$

$\lim_{t \to \infty} x_2(t) = 3$

Sjekk at løsningene vi fant $x_1(t), x_2(t)$ faktisk stemmer overens med:

$$x_1'(t) = -3x_1(t) + x_2(t) + 3, \quad x_1(0) = 3$$

$$x_2'(t) = 2x_1(t) - 4x_2(t) + 8, \quad x_2(0) = 6$$