Tirsdag 4. august

I går så dere at identitetsmatrisen

$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ tilfredsstiller:

$$I_n C = C = C I_n$$

for alle $(n \times n)$-matriser C, på samme måte som at tallet 1: $1 \cdot a = a = a \cdot 1$, $a \in \mathbb{R}$.

Når $a \neq 0$ har vi at $a^{-1} = \frac{1}{a}$, og

$$a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} a.$$

Definisjon La A være en $(n \times n)$-matrise. Dersom det eksisterer en $(n \times n)$-matrise B slik at

$$AB = I_n = BA$$

Kaller vi B inversmatrisen til A.

Proposisjon Dersom en inversmatrise, B, av A eksisterer, er den unik.
Vi kan derfor skrive $A^{-1} := B$ fra nå av.

Bevis Anta at både B og C er inversmatriser av A.

Siden $AB = I_n$ og $AC = I_n$ har vi

$$AB = AC$$
$$BAB = BAC$$
$$I_n B = I_n C$$
$$B = C$$

$BA = I_n \rightarrow$

NB! Siden matrisen generelt ikke kommuterer:

$M = N \Rightarrow BM = BN$

$M = N \Leftarrow MB = NB$

$BM = NB$

Eksempel La $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ og anta at

$$\det(A) = ad - bc \neq 0.$$

Da er $B = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ veldefinert.

Videre har vi at

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$BA = I_2$

$\hookrightarrow$ $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$

Dette holder mer generelt:

Teorem La A være en $(n \times n)$-matrise.

A er inverterbar $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

- Nå vet vi hva vi må sjekke for å avgjøre om A^{-1} eksisterer.
- Når A er (2×2)-matrise og $\det(A)\neq 0$ vet vi hvordan A^{-1} ser ut.

↳ Hvordan finner vi A^{-1} når A er en $(n\times n)$-matrise for $n\geq 3$?

Hvis $\det(A)\neq 0$:

Vi radreduserer totalmatrisen $[A\,|\,I_n]$

$$[A\,|\,I_n] \sim \dots \sim [I_n\,|\,B]$$

↳ da er $A^{-1}=B$.

Hvorfor fungerer dette?

På samme måte når vi Gauss-Jordan-eliminerer $[A\,|\,\bar{b}]$ for å finne $\bar{x}$ som løser $A\bar{x}=\bar{b}$, vil vi finne B-matrisen som løser

$$AB = I_n.$$

Regn ut Avgjør om $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ er inverterbar.

Løsning: $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0.$

$\Rightarrow A^{-1}$ eksisterer.

Hva er A^{-1}?

$$\left[\begin{array}{c|c} & \\ A & I_3 \\ & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[2.\ R_2 \leftrightarrow R_3]{1.\ R_2 \leftrightarrow R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[I_3 \,|\, A^{-1}\right]$$

$$\hookrightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eksempel La A være en inverterbar $(n \times n)$-matrise og $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

$$A\bar{x} = \bar{b} \iff A^{-1}(A\bar{x}) = A^{-1}\bar{b}$$

$$\iff I_n\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$$

$\Rightarrow \bar{x} = A^{-1}\bar{b}$ er en entydig løsning.

Så, hvis du har A^{-1} kan du finne løsningen $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$ av $A\bar{x} = \bar{b}$ uten å radredusere.

Du utfører matrisemultiplikasjonen $A^{-1}\bar{b}$.

Egenverdier og egenvektorer

For enhver $(n \times n)$-matrise finnes det (minst) en vektor med en nyttig egenskap.

Eksempel

Se på $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Vi har $A\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

Så $\bar{x}$ ble transformert til noe helt annet.

Men, $A\bar{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$= 2\bar{v}$.

Så $\bar{v} \xrightarrow{A} 2\bar{v}$ ble transformert til en skalering av seg selv.

Definisjon La A være en $(n \times n)$-matrise, og la λ være et tall (λ kan være et kompleks tall). Vi kaller en vektor $\bar{v}$ for en <u>egenvektor</u> til A med <u>egenverdi</u> λ dersom

i) $\bar{v} \neq \bar{0}$

ii) $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$.

Regn ut Vis at $\bar{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ er en egenvektor til $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Løsning: Du får at $A\bar{v} = -\bar{v}$. Så egenverdien til $\bar{v}$ er $\lambda = -1$.

Hvorfor er egenvektorer og -verdier nyttige?

- Vi kan dekomponere matriser på former som er lettere å jobbe med
- Vektorene og verdiene beskriver løsningen av systemer av differensialligninger vi skal se på senere.

- Matriser er <u>lineære</u>: La A være $(m \times n)$.

Vi kan se på A som en funksjon $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Hvis $A\bar{x} = \bar{y}$ for $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$,

$A(\bar{x}) = \bar{y}$.

Matriser er lineære, dvs. $A(\alpha \bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \alpha A\bar{x}_1 + A\bar{x}_2$ for alle $\alpha \in \mathbb{R}$, og alle $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^n$.

- Legg nå merke til dette: Hvis $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$, så vil

$$A^2\bar{v} = A(A\bar{v}) = A(\lambda\bar{v}) = \lambda A\bar{v} = \lambda\lambda\bar{v} = \lambda^2\bar{v}$$

$$\hookrightarrow A^k\bar{v} = \lambda^k\bar{v}, \quad \text{for alle } k \in \mathbb{N}.$$

Hvordan finner vi egenverdien og -vektoren?

Vi ønsker $\bar{v} \neq \bar{0}$ og λ slik at $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$.

$$\Leftrightarrow \quad A\bar{v} - \lambda\bar{v} = \bar{0}$$

$$A\bar{v} - \lambda\bar{v} = A\bar{v} - \lambda I_n \bar{v} = (A - \lambda I_n)\bar{v}$$

$$\hookrightarrow \boxed{(A - \lambda I_n)\bar{v} = \bar{0}} \quad \bigstar$$

Hvis $B = A - \lambda I_n$ er inverterbar ($\det(B) \neq 0$)

får vi $\bar{v} = B^{-1} B \bar{0} = \bar{0}$ er løsningen.

↑ vi ønsker ikke $\bar{v} = \bar{0}$ per definisjon.

Siden $\det(B) = \det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow$ $B = A - \lambda I_n$ ikke er inverterbar

så finner vi λ-er slik at

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n) = 0 \ \diamondsuit$$

Vi kaller $P_A(\lambda)$ det karakteristiske polynomet til A.

Når vi har funnet $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ som tilfredsstiller $\diamondsuit$, kan vi finne tilhørende egenvektorer $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ slik at

$$(A - \lambda_i I_n)\bar{v}_i = \bar{0}.$$

Eksempel Finn egenvektorer og -verdier

til $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

1) Egenverdien: $A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 12 - 2$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

$P_A(\lambda) = 0$ → ABC-formelen

$$\lambda = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot (1) \cdot 10}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$= \frac{7 \pm 3}{2} \rightarrow \underline{\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2}$$

2) Egenvektoren

$\lambda_1 = 5$: $A - \lambda_1 I_2 = A - 5I_2 = \begin{bmatrix} 4-5 & 2 \\ 1 & 3-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

↳ $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $-x + 2y = 0 \iff x = 2y$.

La $y = t$ $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

$\lambda_2 = 2$: $A - \lambda_2 I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ → $x + y = 0$, $x = -y$

La $y = t$: $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall\, t \neq 0$

$\boxed{s = -t}$ → $\bar{v}_2 = s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\forall\, s \neq 0$

La oss teste: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$

$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \bar{v}_1$$

$$A\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_2 \bar{v}_2$$

Kommentar

Reelle $(n \times n)$-matriser kan ha komplekse egenverdier og egenvektorer, men i dette forkurset unngår vi komplekse tall og eksempler hvor det oppstår.

La $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Da har vi at

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + \det(A).$$

ABC $\rightarrow$ $$\lambda = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4\det(A)}}{2}.$$

Tre tilfeller:

1) $(a+d)^2 > 4\det(A) \Rightarrow$ to distinkte egenverdier $\lambda_1 \neq \lambda_2$

2) $(a+d)^2 = 4\det(A) \Rightarrow$ kun én egenverdi $\lambda = \frac{(a+d)}{2}$

3) $(a+d)^2 < 4\det(A) \Rightarrow$ komplekse egenverdier.

Lineær utspenning og underrom

Definisjon La $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m \in \mathbb{R}^n$. Vi kaller $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ en <u>lineærkombinasjon</u> av $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$ dersom det finnes skalarer $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ slik at

$$\bar{x} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_m\bar{v}_m.$$

Samlingen av alle $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ som kan skrives som en lineærkombinasjon av $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$ kalles for (det lineære) <u>utspennet</u> av $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$.

Vi skriver

$$\text{Span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m) := \left\{ a_1\bar{v}_1 + \dots + a_m\bar{v}_m \;\middle|\; \text{for alle } a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>Eksempel</u>

① Vi ser på $\text{span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$, $\bar{x} = \begin{bmatrix}33\\12\end{bmatrix}$, og en hvilken som helst vektor $\bar{y} = \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\bar{x} = \begin{bmatrix}33\\12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}33\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\12\end{bmatrix} = 33\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 12\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \bar{x} \in \text{span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

Generelt, $\bar{y} = \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \bar{y} \in \text{span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$

(2) Er $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et element i $\text{span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$?

Nei, fordi

$$\text{span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \bar{y} = a\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid \text{for alle } a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \bar{y} = \begin{bmatrix} a \\ b-a \\ 0 \end{bmatrix} \mid \text{for alle } a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \bar{y} = \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ 0 \end{bmatrix} \mid \text{for alle } \tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \mid y_3 = 0 \right\}$$

og for $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ har vi at $x_3 = 3 \neq 0$.

Underrom av $\mathbb{R}^n$

En undermengde U av $\mathbb{R}^n$ er en samling av vektorer $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Med andre ord,

$$\bar{x} \in U \Rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Vi skriver $U \subset \mathbb{R}^n$

Hvis $U \subset \mathbb{R}^n$ og $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \bar{x} \in U$ så $\mathbb{R}^n \subset U$. Siden $U \subset \mathbb{R}^n$ og $\mathbb{R}^n \subset U$ har vi $U = \mathbb{R}^n$

Eksempel

1) For $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m \in \mathbb{R}^n$ så er $U = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m\} \subset \mathbb{R}^n$

2) $U = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} \mid \text{for alle } t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

En undermengde $U \subset \mathbb{R}^n$ kalles den tomme mengden dersom den ikke inneholder noen elementer, altså $U = \{\}$. Vi skriver da gjerne $U = \emptyset$.

NB $U = \{\bar{0}\}$ er ikke tomt. Den inneholder ett element nemlig $\bar{x} = \bar{0}$.

Noen undermengder har en nyttig egenskap.

Definisjon La $U \subset \mathbb{R}^n$. Vi kaller U et underrom av $\mathbb{R}^n$ dersom

1) $U \neq \emptyset$
2) For alle $\bar{u}, \bar{v} \in U \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in U$
3) For alle $\bar{u} \in U$ og alle $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a\bar{u} \in U$.

→ Ser du hvorfor alle underrom $U \subset \mathbb{R}^n$ inneholder $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$? Altså, $\bar{0} \in U$.

→ Ser du at $U = \{\bar{0}\}$ er et underrom?

→ Sjekk selv: $\text{Span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m) \subset \mathbb{R}^n$ er et underrom for $m \geq 1$.

Lineær uavhengighet

Vi ønsker å kvitte oss med overflødige vektorer $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$ når vi ser på $\text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m)$.

Eksempel

La $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$. Legg merke til at

$$\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\bar{v}_1 + \bar{v}_2$$

$$\rightarrow \bar{v}_3 \in \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2).$$

Men da får vi at $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ fordi

$$\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = \left\{ a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 + c\bar{v}_3 \mid \forall\, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ (a+2c)\bar{v}_1 + (b+c)\bar{v}_2 \mid \forall\, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 \mid \forall\, a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2).$$

Definisjon La $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m \in \mathbb{R}^n$. Vi kaller vektorene **lineært uavhengige** dersom

$$a_1\bar{v}_1 + \dots + a_m\bar{v}_m = \bar{0} \iff a_1 = \dots = a_m = 0.$$

Hvis de ikke er lineært avhengig kaller vi dem **lineært avhengige**

Hvordan sjekke lineær uavhengighet?

Vektor ligningen $a_1\bar{v}_1 + \dots + a_m\bar{v}_m = \bar{0} \in \mathbb{R}^n$

er ekvivalent med $A\bar{x} = \bar{b}$ hvor

$$A = \underset{(n\times m)}{\left[\bar{v}_1 \cdots \bar{v}_m\right]}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \text{ og } \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{0}.$$

Så $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$ er lineært uavhengige

hvis og bare hvis

$$A\bar{x} = \left[\bar{v}_1 \cdots \bar{v}_m\right]\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \bar{0} \in \mathbb{R}^n$$

har den entydige løsningen

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{0} \in \mathbb{R}^m$$

$\hookrightarrow a_1 = \dots = a_m = 0.$

Eksempel Er $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ lineært uavhengige?

$$A = \left[\bar{v}_1\ \bar{v}_2\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left[A \mid \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Så $a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a_1 = a_2 = 0$

og $\bar{v}_1$ og $\bar{v}_2$ er lineært uavhengige.

Observer at for $A\bar{x} = \bar{b}$ når $\bar{b} = \bar{0}$,

vil

$$[A : \bar{0}] \sim \dots \sim [\tilde{A} : \bar{0}]$$

uansett hvilke rad operasjoner du velger å ta.

Så når vi skal finne løsning til

$A\bar{x} = \bar{0}$ holder det å Gauss-Jordan-eliminere

$[A] \sim \dots \sim [\tilde{A}]$ istedenfor $[A : \bar{0}] \sim \dots \sim [\tilde{A} : \bar{0}]$.

Vi husker fra tidligere at følgende er ekvivalent for $(n \times n)$-matrisen A:

1) $A\bar{x} = \bar{b}$ har entydig løsning

2) $\det(A) \neq 0$

3) A er inverterbar

For $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in \mathbb{R}^n$ sett $A = [\bar{v}_1 \cdots \bar{v}_n]$ som er $(n \times n)$. Hvis A^{-1} eksisterer:

$$A\bar{x} = \bar{0} \iff \bar{x} = A^{-1}(A\bar{x}) = A^{-1}\bar{0} = \bar{0}$$

Vi konkluderer med følgende resultat

Teorem La $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in \mathbb{R}^n$ og $A = [\bar{v}_1 \cdots \bar{v}_n]$

Vektorene $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$.

Regn ut er $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$ lineært uavhengige?

Løsning: Ja, $\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -24 - 24 = -48 \neq 0$

Basis

Tidligere så vi at vektorene $\bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ kan beskrive hvilken som helst vektor

$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vha. lineærkombinasjon.

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2 .$$

↳ $\mathbb{R}^2 = \text{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

Dessuten er $\bar{e}_1$ og $\bar{e}_2$ lineært uavhengige $\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \right)$. $U = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ er hva vi kaller en basis for $\mathbb{R}^2$.

Definisjon La $U \subset \mathbb{R}^n$ være et underrom av $\mathbb{R}^n$. Vi kaller $\mathcal{B} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\} \subset U$ en basis for U hvis:

1) vektorene i $\mathcal{B}$ er lineært uavhengige
2) vektorene i $\mathcal{B}$ utspenner hele underrommet, altså $\text{span}(\mathcal{B}) = U$.

Proposisjon Hvis både $\mathcal{B} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$ og $\tilde{\mathcal{B}} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_\ell\}$ er basiser for et underrom U så må $\ell = m$.

Definisjon La $\mathcal{B} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$ være en basis for et underrom U. Dimensjonen til U er lik antall basisvektorer i $\mathcal{B}$,

$$\dim(U) = m$$

Eksempler

① La $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Siden $\bar{u} \neq \bar{0}$ har vi at

$$\alpha \bar{u} = \bar{0} \iff \alpha = 0.$$

Så $\bar{u}$ er lineært uavhengig. Vi kan definere underrommet $U := \text{span}(\bar{u})$ som da vil ha $\mathcal{B} = \{\bar{u}\}$ som basis. Siden $\mathcal{B}$ inneholder kun ett element har vi at $\dim(U) = 1$.

Videre har vi at

$$U = \left\{ \bar{x} = \alpha \bar{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid x_1 = -x_2 \right\}$$

(2) Vi ser på vektorene

$$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 .$$

Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

er en (4x3)-matrise → Vi kan ikke bruke determinant-testen for å sjekke om vektorene er lineært uavhengige.

Gauss-Jordan-eliminasjon av A gir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Så $$\sum_{i=1}^{3} a_i \bar{u}_i = A \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ danner en basis for det 3-dimensjonale rommet

$$U := \text{span}(\mathcal{B}) \subset \mathbb{R}^4 .$$

Hvordan ser U ut?

La $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ være en tilfeldig vektor i $\mathbb{R}^4$.

Vi ønsker å løse $A\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \bar{x}$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \bar{x} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 2 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 2 & x_4 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 4x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -8x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 \end{array}\right]$$

$a_1 = x_1$, $a_2 = -2x_1 + x_2$ og $a_3 = 4x_1 - 2x_2 + x_3$ er greit, men den siste raden kan ha "$0 = 1$"-problematikk. og ha ingen løsninger...

med mindre

$$-8x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0.$$

$$\Rightarrow \quad U = \left\{ \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; -8x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \right\}$$