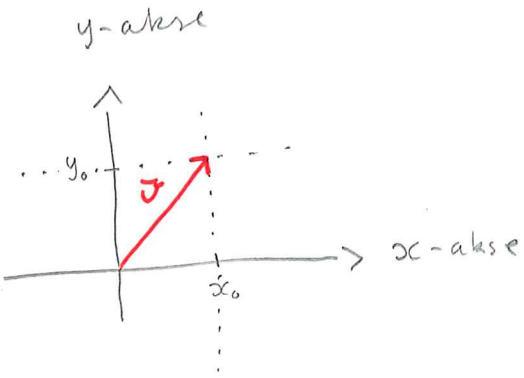
Mandag 3. august 2026

Vektorer

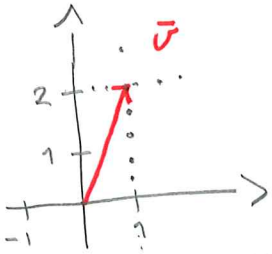
Geometrisk perspektiv

- Punkter i planet $\mathbb{R}^2$

$\bar{v} = (x_0, y_0)$



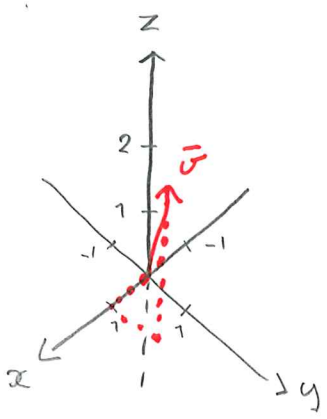
For $\bar{v} = (1, 2)$



- Punkter i rommet $\mathbb{R}^3$

$\bar{v} = (x, y, z)$

$\bar{v} = (1, 1, 2)$



Vi skriver gjerne en vektor $\bar{v} = (x, y)$ som en kolonnevektor, $\bar{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, istedenfor.

Tilsvarende, for en n-dimensjonal vektor:

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

Når $n \geq 4$ blir punktillustrasjonen kaotisk og ser heller på $\bar{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ som en kolonne/søyle med n elementer/datapunkter.

Regneregler, lengde og prikkprodukt

Vi kan addere og skalere vektorer ved å utføre operasjonene elementvis:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad a\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} av_1 \\ \vdots \\ av_n \end{bmatrix} \quad \text{for } a \in \mathbb{R}.$$

Regn ut

1) $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ 2) $\bar{w} = (-2)\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 3) $\bar{v} + \bar{w}$

Lengde

Lengden av et tall $a \in \mathbb{R}$ er gitt som absoluttverdien:

$$|a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a \leq 0 \end{cases}.$$

For en vektor $\bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ er lengden av $\bar{v}$ gitt ved

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

For en generell n-dimensjonal vektor $\bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$:

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}.$$

Prikkprodukt

For $\bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ og $\bar{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$: $\bar{v} \cdot \bar{w} := v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n$

Merk at $\bar{v} \cdot \bar{v} = v_1^2 + \ldots + v_n^2$ har vi at

$$\sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2} = |\bar{v}|.$$

Vektorfunksjoner

For $t \in \mathbb{R}$ la $f(t), g(t) \in \mathbb{R}$ være to funksjoner.

Vi danner en vektor funksjon $\bar{v}(t) \in \mathbb{R}^2$ ved å definere

$$\bar{v}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}.$$

Dersom f og g er deriverbare så er den deriverte av $\bar{v}$ gitt ved

$$\bar{v}'(t) = \begin{bmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{bmatrix}.$$

Regn ut

Finn $\bar{v}'(t)$ for $v(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ \frac{e^{at}}{t} \end{bmatrix}$ hvor $a \neq 0$.

Lineære ligningssystemer som vektorligninger

n ukjente $x_1, \ldots, x_n$
m ligninger

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Regn ut

Konverter

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = a \\ 6x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

til en vektorligning.

Matriser

En $(m \times n)$-matrise er en "tabell"

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

med m rader og n kolonner med tall $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

- En (2×2)-matrise er $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$
- En (2×3)-matrise er $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$
- En (2×1)-matrise er en kolonnevektor $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$.

Regneregler

Addisjon: To matriser A, B av samme dimensjon $m \times n$ kan adderes til en ny $(m \times n)$-matrise

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Skalering: For en skalar $k \in \mathbb{R}$ og matrise $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

blir $$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Regn ut

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2) $\pi \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Matrisemultiplikasjon

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \vdots \\ \bar{r}_m \end{bmatrix}$, hvor $\bar{r}_i = [a_{i1} \cdots a_{in}]$ er rad nummer i av A for $i = 1, \ldots, m$

- $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{n\ell} \end{bmatrix} = [\bar{k}_1 \cdots \bar{k}_\ell]$, hvor $\bar{k}_i = \begin{bmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{bmatrix}$ er kolonne nummer i av B for $i = 1, \ldots, \ell$

Legg merke til at A er $m \times n$ og B er $n \times \ell$, og prikkproduktet $\bar{r}_i \cdot \bar{k}_j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$ gjør mening.

Da er AB en $(m \times \ell)$-matrise gitt ved

$$AB = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \cdot \bar{k}_1 & \bar{r}_1 \cdot \bar{k}_2 & \cdots & \bar{r}_1 \cdot \bar{k}_\ell \\ \bar{r}_2 \cdot \bar{k}_1 & \bar{r}_2 \cdot \bar{k}_2 & & \bar{r}_2 \cdot \bar{k}_\ell \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{r}_m \cdot \bar{k}_1 & \bar{r}_m \cdot \bar{k}_2 & \cdots & \bar{r}_m \cdot \bar{k}_\ell \end{bmatrix}$$

Eksempel

Vi ser på (2×2)-matrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Her er antall kolonner i A $n = 2$ lik antall rader i B.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

1. 2.

La A være $(m \times n)$ og B $(k \times \ell)$.

- Produktet AB er veldefinert kun hvis $n = k$ og AB blir $(m \times \ell)$:

$$(m \times \cancel{n})(\cancel{k} \times \ell) \Rightarrow (m \times \ell)$$

(A, B, AB)

NB! Hvis både A og B er $(n \times n)$-matriser så er både AB og BA veldefinert som $(n \times n)$-matriser.

Men, AB er ikke nødvendigvis lik BA.

Dere finner oppgaver om dette i oppgavesett 1.

Eksempel

pristabell over brød og melk

	Brød	melk
kiwi	30	10
coop	25	20

$$\Rightarrow A = \begin{matrix} \text{Brød} & \text{melk} \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 25 & 20 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{kiwi} \\ \leftarrow \text{coop} \end{matrix}$$

To barnehager, B1 og B2, har følgende handleliste

	B_1	B_2
Brød	7	3
melk	3	2

$$\Rightarrow \bar{b}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}, \bar{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

For B1 har vi: $A\bar{b}_1 = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 25 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210+30 \\ 175+60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 \\ 235 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{kiwi} \\ \leftarrow \text{coop} \end{matrix}$

Det koster B1 240 kr å handle på kiwi, og 235 kr på coop.

Vi kan regne ut alle de 4 ulike handleturene i en smekk:

$$AB = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 25 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 & 90+20 \\ 235 & 75+40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 & 110 \\ 235 & 115 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{kiwi} \\ \leftarrow \text{coop} \end{matrix}$$

$\uparrow$ B1 $\quad$ $\uparrow$ B2

For B1 er det billigst å handle på coop, mens for B2 er det billigst å handle på kiwi.

Gauss-Jordan-eliminasjon

Radoperasjoner:

1) Bytte plass på to rader

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Multiplisere en rad med et tall som ikke er null

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftarrow \frac{1}{4}R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Legge et multiplum av en rad til en annen rad

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-2R_1 = [-2\cdot 1 \quad -2\cdot 0 \quad -2\cdot 0] = [-2 \quad 0 \quad 0]$$

$$R_3 - 2R_1 = [2 \quad 0 \quad 1] + [-2 \quad 0 \quad 0] = [2-2 \quad 0+0 \quad 1+0] = [0 \quad 0 \quad 1]$$

Redusert trappeform

La $I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ være $(k \times k)$-matrisen med 1-ere på diagonalen og 0-elementer ellers. $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Uformelt: redusert trappeform av en $(m \times n)$-matrise, er å få den så nærme I_k for $k = \min(m, n)$, ved hjelp av radoperasjonene 1), 2), og 3).

Eksempel

bli kvitt

① $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftarrow R_2 - R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftarrow -R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

kvitte oss med denne

② $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftarrow R_2 - R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

bli kvitt

$\overset{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftarrow -R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Vi fikk ikke radredusert til $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, men vi fikk I_2 som nest beste alternativ.

- La A være en matrise og $\tilde{A}$ en redusert trappeform av A vha. en rekke radoperasjoner $A \sim \dots \sim \tilde{A}$. Da er $\tilde{A}$ unik. Det vil si, hvis B er på redusert trappeform etter andre radoperasjoner på A, $A \sim \dots \sim B$, så er

$$\tilde{A} = B.$$

→ Se videoer på emnesiden for mer informasjon ...

Fra lineært ligningssystem til matriseligning

Se på ligningssystemet

$$\star \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow A\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Ligningssettet $\star$ representerer det samme som matriseligningen

$$A\bar{x} = \bar{b}.$$

Totalmatrisen til $\star$ er $[A \,|\, \bar{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right]$

Regn ut

Hva er 1) matriseligningen og 2) totalmatrisen til

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \; ?$$

Eksempel La oss radredusere/Gauss-Jordan-eliminere totalmatrisen til L: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 = 8 \end{cases}$. vi får

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$ og totalmatrisen $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{array}\right]$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

→ konverter tilbake til ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

og $x_1 = 2, x_2 = 1$ er en løsning til

L $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 = 8 \end{cases}$! La oss sjekke

$$x_1 + 3x_2 = (2) + 3(1) = 5 \quad \checkmark$$
$$2x_1 + 4x_2 = 2(2) + 4(1) = 8 \quad \checkmark$$

Generell oppskrift

Vi har et sett med m ligninger og n ukjente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

hvor $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ er kjent.

Vi ønsker å finne $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

1) Sett opp totalmatrisen $[A \,|\, \bar{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$

2) Gauss-Jordan-eliminer: radreduser til redusert trappeform.

$[A \,|\, \bar{b}] \sim \dots \sim [\tilde{A} \,|\, \bar{c}]$

3) Konverter $[\tilde{A} \,|\, \bar{c}]$ tilbake til ligningssystem og les av løsningen.

Eksempel

Tre ukjente, men kun to ligninger

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \sim \overset{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right]}$$

$$\overset{R_1 \leftarrow R_1 + R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right] \overset{R_2 \leftarrow -R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$x_3 = t$ en triparametr

$$\hookrightarrow \begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= x_3 = t \\ x_2 &= 4 - 2x_3 = 4 - 2t \end{aligned}$$

Løsning: $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 4-2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

Vi har uendelig mange løsninger.

Generelt tre muligheter:

1) Én unik løsning $\bar{x}$ av $A\bar{x} = \bar{b}$

Eksempel: $[A \,|\, \bar{b}] \sim \dots \sim [I_n \,|\, \begin{smallmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{smallmatrix}] \Rightarrow x_i = c_i$ for $i = 1, \dots, n$

2) Uendelig mange løsninger

Eksempel: $[A \,|\, \bar{b}] \sim \dots \sim [I_m \; B \,|\, \begin{smallmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{smallmatrix}]$ hvor B er $(m \times k)$ for $k = n - m$

3) Ingen løsning

Når det oppstår "$0 = 1$" eller lignende

Eksempel: $\sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|c} \alpha & \beta & c_1 \\ 0 & 0 & c_2 \end{array}\right]$, $c_2 \neq 0$

$0 = 0x_1 + 0x_2 = c_2 \neq 0$

Regn ut Finn løsningen av

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

ved hjelp av Gauss-Jordan-eliminering / radreduksjon.

Løsning

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \overset{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{array}\right] \overset{R_1 \leftarrow R_1 + R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right]$$

$$\hookrightarrow \quad x_1 = -2$$
$$x_2 = \frac{3}{2}$$

Advarsel: Når dere radreduserer i fremtiden, ikke multipliser en rad elementvis med en annen rad, altså

$$\text{"} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1 \leftarrow R_1 \cdot R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 8 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \text{"}$$

Da går det galt.

Determinanten av en matrise

Definisjon La A være en (2×2)-matrise gitt som $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Determinanten til A er

$$\det(A) := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$$

Regn ut

For $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ og $B=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, regnut $\det(A)$ og $\det(B)$

For en (3×3)-matrise $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ er

$$\det(A) = \begin{array}{ccc} + & - & + \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{array} = +a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Vi kan også utvikle determinanten fra en annen rad eller kolonne:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ + \\ - \\ + \end{matrix}$$

$$= +a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Eksempel $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= 1(1\cdot 1 - 1\cdot 0) - 2(1\cdot 1 - 1\cdot 0) + 3(1\cdot 0 - 1\cdot 0)$

$= 1 - 2 + 0 = \underline{-1}$

raskere — flest "0" her

$$\det(A) = +0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 0 + 1(1^2 - 2)$$

$$= \underline{\underline{-1}}$$

Generelt har vi følgende fortegns-rutenett som avgjør hva som gir riktig fortegn til elementene i raden/kolonnen du velger å utvikle determinanten med:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Regn ut

Finn determinanten til $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$.

Fasit: $\det(A) = 23$. Hvilken linje valgte du å starte med?

Man kan regne ut determinanten til alle $(n \times n)$-matriser

Teorem La A være en $(n \times n)$-matrise.

(1) Hvis $\tilde{A}$ er matrisen som dannes ved å bytte plass på to rader i A $\Rightarrow$ $\det(\tilde{A}) = -\det(A)$.
(samme resultat ved å bytte plass på to kolonner istedenfor to rader)

(2) Hvis $\tilde{A}$ er matrisen som dannes ved å skalere én rad i A med $\alpha \in \mathbb{R}$, og $\hat{A}$ er matrisen som dannes ved å skalere én kolonne i A med α $\Rightarrow$ $\det(\tilde{A}) = \det(\hat{A}) = \alpha \det(A)$.

(3) Hvis $\tilde{A}$ er slik at $A \xrightarrow{R_i \leftarrow R_i + \alpha R_j} \tilde{A}$ for $\alpha \in \mathbb{R}$, $\begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j \neq i \end{matrix}$

$\Rightarrow \det(\tilde{A}) = \det(A)$

(4) La $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$. Følgende er ekvivalent:

a) $A\bar{x} = \bar{b}$ har en entydig løsning

b) $\det(A) \neq 0$

Punkt (4) i teoremet forteller oss at

$$\det(A) = 0 \iff A\bar{x} = \bar{b}$$ har enten ingen eller uendelig mange løsninger

Regn ut

For $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -37 & 2 & 1 \\ \sqrt{5} & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ avgjør om $A\bar{x} = \bar{b}$

vil ha en entydig løsning eller ikke.

Løsning: $$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -37 & 2 & 1 \\ \sqrt{5} & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 0 + 0$$

$$= 4 - 4$$

$$= 0$$

Så $A\bar{x} = \bar{b}$ har enten ingen eller uendelig mange løsninger.

Om det er ingen eller uendelig mange løsninger avhenger av $\bar{b}$.