Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Oppfriskningskurs
Sommer 2016

Løsningsforslag

1 **a)** At $a \in \mathbb{Q}$ betyr at a ligger i de rasjonale tallene. Altså, a er et rasjonalt tall. At $b \in \mathbb{Z}$ betyr at b ligger i heltallene, Altså, b er et heltall.

b)

$$\begin{aligned} x \in [-1, 8] &\quad\Leftrightarrow\quad -1 \leq x \leq 8, \\ x \in (0, \infty) &\quad\Leftrightarrow\quad 0 < x < \infty, \\ x \in (-4, -1] &\quad\Leftrightarrow\quad -4 < x \leq -1. \end{aligned}$$

2 **a)** Vil skal løse ulikheten $9x^3 - 2x^2 < 0$.
Vi starter med å finne nullpunktene til $9x^3 - 2x^2$:

$$\begin{gathered} 9x^3 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \\ x^2(9x - 2) = 0 \Leftrightarrow \\ x^2 = 0 \text{ eller } 9x - 2 = 0 \end{gathered}$$

$x^2 = 0$ når $x = 0$, og $9x - 2 = 0$ når $x = \frac{2}{9}$. Nå kan vi tegne fortegnskjema, eller legge merke til at $x^2 \geq 0$, så for at $9x^3 - 2x^2 < 0$ må $9x - 2 < 0$ og x^2 må ikke være lik 0 (hvis $x^2 = 0$ får vi ikke streng ulikhet). Så, $9x^3 - 2x^2 < 0$ når $x < \frac{2}{9}$ og $x \neq 0$ (x ikke lik 0).

b) Vi skal løse $\frac{x-3}{x} \geq -(1+x)$. Siden x inngår i nevner på venstre side, må vi dele opp i to ulike tilfeller: $x > 0$ og $x < 0$. Vi starter med $x > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{x} &\geq -(1+x) && \\ x - 3 &\geq -(1+x)x && \text{ganget med } x \text{ på begge sider} \\ x - 3 + (1+x)x &\geq 0 && \text{lagt til } -(1+x)x \text{ på begge sider} \\ x^2 + 2x - 3 &\geq 0 && \\ (x+3)(x-1) &\geq 0 && \text{skrevet om til produkt av lineære faktorer} \end{aligned}$$

$(x+3)(x-1) \geq 0$ dersom $(x+3) \geq 0$ og $(x-1) \geq 0$ eller dersom $(x+3) \leq 0$ og $(x-1) \leq 0$. $(x+3) \geq 0$ og $(x-1) \geq 0$ gir $x \geq 1$. $(x+3) \leq 0$ og $(x-1) \leq 0$ gir $x \leq -3$, så i det tilfellet har vi ingen positive løsninger.
Så antar vi at $x < 0$ og gjør samme utregning som over, men merk at ulikhetstegnet da må snus i andre linje siden vi ganger med negativ x. Vi får da at vi må sjekke når $(x+3)(x-1) \leq 0$. Vi kan tegne fortegnslinje, eller se at uttrykket holder dersom $(x+3)$ og $(x-1)$ har ulike fortegn:

$$(x+3) \geq 0 \text{ og } (x-1) \leq 0 \text{ gir } -3 \leq x \leq 1,$$

$$(x+3) \leq 0 \text{ og } (x-1) \geq 0 \text{ gir ingen løsning.}$$

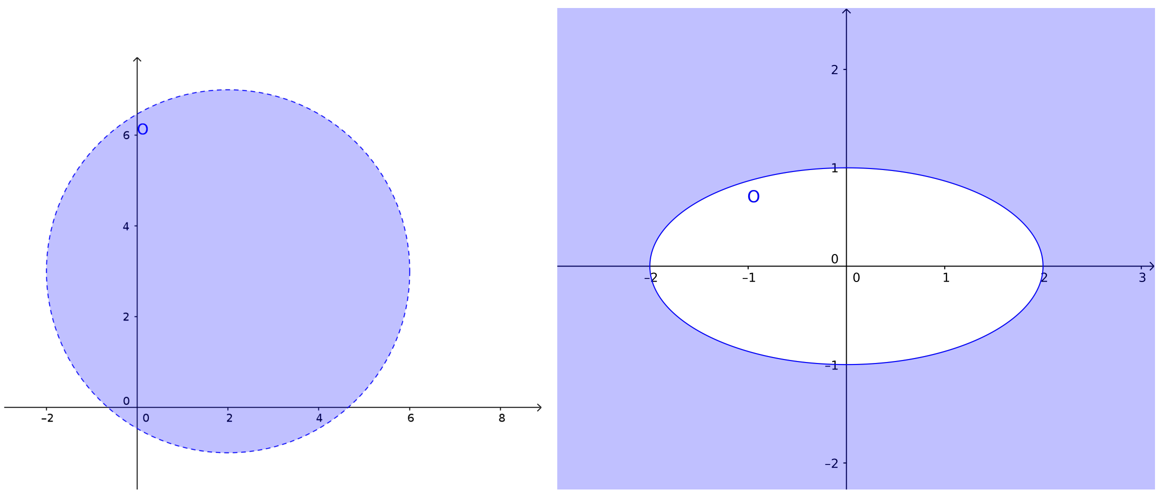
Merk at vi antok $x < 0$, så løsningen i dette tilfellet blir $-3 \leq x < 0$. Summert opp: $\frac{x-3}{x} \geq -(1+x)$ dersom $-3 \leq x < 0$ eller $x \geq 1$.

$\boxed{3}$ Vi skal skissére følgende uttrykk, og nevne noen av egenskapene til figurene;

a) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 10 < -13$.
Vi starter med å skrive om $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 10$:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 6y + 10 &= x^2 - 4x + y^2 - 6y + 10 \\ &= (x-2)^2 - 2^2 + (y-3)^2 - 3^2 + 10 \\ &= (x-2)^2 + (y-3)^2 - 2^2 - 3^2 + 10 \\ &= (x-2)^2 + (y-3)^2 - 3, \end{aligned}$$

så vi skal skissere $(x-2)^2+(y-3)^2+-3 < 13$, evt. $(x-2)^2+(y-3)^2+ < 16 = 4^2$. Det området vi skal skissere er altså en disk uten kant (streng ulikhet) med sentrum i $(2,3)$ og radius 4. Se figur 1a).



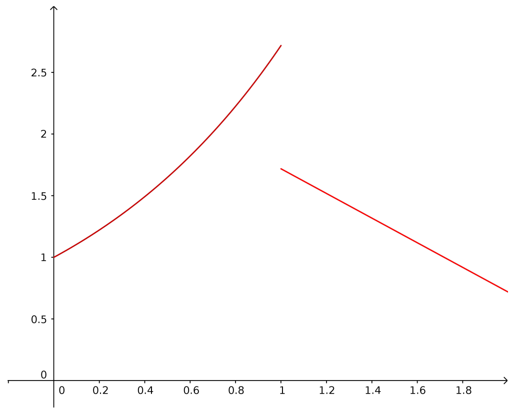
(a) Oppg. 3a) (b) Oppg. 3b)

Figur 1: Skisser

b) Vi skal skissere $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} \geq 1$. Vi kjenner igjen uttrykket $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ som likningen til en ellipse med sentrum i origo, med halvakse lik 2 i x-retning og halvakse lik 1 i y-retning. Legg merke til at vi skal skissere området utenfor ellipsen: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} \geq 1$. Se figur 1b) for skissen.

$\boxed{4}$ Skissen av funksjonen er i figur 2. Vi kan se fra skissen at funksjonen ikke er kontinuerlig i $x = 1$. Vi kan gjøre den kontinuerlig ved å bytte ut e^1 med et tall a slik at $e^x = a - x$ i punktet $x = 1$. Det gir oss at $a = e^1 + 1$.

$\boxed{5}$ La $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ og $g(x) = x^2$.



Figur 2: Skisse av funksjon

a) Hintet forteller oss at $x = 1$ er en rot av $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Ved polynomdivisjon får vi at

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1} = x^2 - 2x + 1.$$

$x^2 - 2x + 1$ har en rot $x = 1$ med multiplisitet 2. Dette gir

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ &= (x-1)(x^2 - 2x + 1) \\ &= (x-1)(x-1)^2 = (x-1)(x-1)(x-1), \end{aligned}$$

og $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = (x^2 - 1)^3 = (x+1)^3(x-1)^3$. Vi ser at $(f \circ g)(x) > 0$ dersom $(x+1)$ og $(x-1)$ har samme fortegn. De har samme fortegn for $x < -1$ eller $x > 1$.

b) Graden til $(f \circ g)(x)$ er 6, og graden til $(g \circ g)(x)$ er 4.

$\boxed{6}$ Vi skal finne alle løsninger av

$$|x - 2| \cos(x^3) = 0,$$

så vi må sjekke når $|x-2| = 0$ og $\cos(x^3) = 0$. $|x-2| = 0$ når $x = 2$. $\cos(x^3) = 0$ når $x^3 = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, og dermed er $|x-2|\cos(x^3) = 0$ dersom $x = 2$ eller $x = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + n\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{7}$ Vi bruker logaritmereglene:

$$\begin{aligned} 2\ln(2x) + \ln((3x)^5) &= 3\ln(4x) + 2 \Leftrightarrow \\ 2\ln(2x) + 5\ln(3x) &= 3\ln(4x) + 2 \Leftrightarrow \\ 2\ln(2) + 2\ln(x) + 5\ln(3) + 5\ln(x) &= 3\ln(4) + 3\ln(x) + 2 \Leftrightarrow \\ 2\ln(x) - 3\ln(x) + 5\ln(x) &= 3\ln(4) + 2 - 2\ln(2) - 5\ln(3) \Leftrightarrow \\ \ln(x^2) - \ln(x^3) + \ln(x^5) &= \ln(4^3) - \ln(2^2) - \ln(3^5) + 2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\ln\left(\frac{x^2x^5}{x^3}\right) = \ln\left(\frac{4^3}{2^2 3^5}\right) + 2 \Leftrightarrow$$
$$\ln(x^4) = \ln\left(\frac{4^3}{2^2 3^5}\right) + 2$$

Dette gir

$$x^4 = \exp(\ln\left(\frac{4^3}{2^2 3^5}\right) + 2) = \frac{4^3}{2^2 3^5}e^2 = \frac{4^2}{3^5}e^2.$$

Vi løser $x^4 = \frac{4^2}{3^5}e^2$ og får

$$x = \pm\sqrt[4]{\frac{4^2}{3^5}e^2}.$$

Siden vi bare kan ta logaritmen av et positivt tall, blir svaret dermed

$$x = \sqrt[4]{\frac{4^2}{3^5}e^2}.$$

$\boxed{8}$ Vi skal vise ved induksjon at

$$n! > 2^n$$

for alle $n \in \mathbb{N}$ hvor $n \geq 4$. Merk at vi her begynner på $n = 4$ og ikke 0 eller 1.

1) Vi sjekker grunnsteget, altså sjekker vi om ulikheten stemmer for $n = 4$: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ og $2^4 = 16$. $24 > 16$, så ulikheten stemmer for $n = 4$.

2) Vi antar nå at ulikheten stemmer for $n = k$, for $k \geq 4$, det vil si at vi antar at $k! > 2^k$ er sann. Så sjekker vi om vi da kan vise at ulikheten også stemmer for $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
(k+1)! &= k!(k+1) \\
&> 2^k(k+1) && (\text{siden} \quad k! > 2^k) \\
&> 2^k 2 && (\text{siden } k+1 > 2 \text{ når } k \geq 4) \\
&= 2^{k+1}.
\end{aligned}$$

Vi har nå vist at ulikheten stemmer for $n = k + 1$ dersom den stemmer for $n = k$. Med grunnsteget, 1), har vi da vist at ulikheten stemmer for alle $n \geq 4$.