Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Oppfriskningskurs Sommer 2019

Øving 4

1 Forenkle uttrykkene.

a) $\frac{\sin(x)\cos^2(x)+\sin^3(x)}{2\cos(x)}$

b) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

2 Vis følgende trigonometriske identiteter.

a) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$

b) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2(\frac{x}{2})$

3 Tegn grafene til sinus, cosinus og tangens med frihånd over to perioder (f. eks. $[0, 4\pi]$).

4 Vi skal nå beregne noen eksaktverdier for sinus og cosinus "fra scratch".

a) Forklar, med utgangspunkt i enhetssirkelen, hvorfor $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ og $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

b) Bruk verdiene over til å finne $\sin\frac{\pi}{4}$ og $\cos\frac{\pi}{4}$. (Hint: Cosinussetningen.)

c) Finn $\cos\frac{\pi}{3}$. (Hint: 30-60-90-regelen.)

d) Bruk verdien over til å finne $\sin\frac{\pi}{3}$.

e) Bestem nå $\sin\frac{2\pi}{3}$ og $\cos\frac{2\pi}{3}$.

5 Skissér grafene for $x \in [0, 2\pi]$.

a) $\sin(\pi x)$

b) $1 + \cos(x + \frac{\pi}{4})$

c) $\sin^2 x$

d) $f(x) = \begin{cases} \cos x \text{ hvis } 0 \le x \le \pi \\ \sin x \text{ hvis } \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

e) $2^x \sin(2x)$

6 Finn den generelle løsningen til ligningene.

a) $\cos(2x + \pi) = -1$

b) $2\sin^2(x) + \sin(x) = 0$

c) $\sin(2x)\cos(x) = 0$

d) $\tan(x) = -1$

7 Løs ulikhetene.

a) $\sin x \geq 0$

b) $\tan x > 1$

c) $\cos x > 1$

8 Vis trekantulikheten, dvs. at $|a + b| \leq |a| + |b|$ for alle $a, b \in \mathbb{R}$. (Hint: betrakt kvadratene.)

9 Bevis følgende utsagn ved induksjon.

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ for alle heltall $n \geq 1$.

b) $4^n - 1$ er delelig med 3 for alle heltall $n \geq 1$.

c) $\cos(u) \cdot \cos(2u) \cdot \cos(2^2u) \cdots \cos(2^{n-1}u) = \frac{sin(2^n u)}{2^n \sin(u)}$ for alle heltall $n \geq 1$.

Ekstraoppgave 1 Bevis at dersom n^2 er et partall, så er n et partall. (Hint: bruk et kontrapositivt bevis, dvs. vis at dersom n er odde så er n^2 odde. Bruk at ethvert oddetall kan skrives som $2k + 1$ for en $k \in \mathbb{Z}$.)

Ekstraoppgave 2 Vis at $\sqrt{3}$ er et irrasjonalt tall. (Hint: bruk et selvmotsigelsesbevis. Anta at $\sqrt{3}$ kan skrives som en brøk (hvor teller og nevner ikke har noen felles primtallsfaktorer), kvadrer uttrykket og oppnå så en selvmotsigelse.)

Ekstraoppgave 3 Finn feilen i følgende "induksjonsbevis":

Påstand: Alle hester har samme farge.

Vi viser ved induksjon at for ethvert naturlig tall n, så vil enhver samling med n hester ha samme farge.

Grunnsteget: Trivielt for $n = 1$. For hvis vi har en samling bestående av kun én hest så har alle (dvs. den ene) hesten(e) samme farge.

Induksjonshypotesen: Anta at enhver samling med $n = k$ hester har samme farge.

Induksjonssteget: Vi må nå vise ved hjelp av induksjonshypotesen at enhver samling med $n = k + 1$ hester har samme farge. Først, ekskluder den siste hesten og

betrakt de første k hestene. Ved induksjonshypotesen har alle disse samme farge. Se nå bort fra den første hesten og betrakt de siste k hestene. Disse må også ha samme farge. Den første hesten har derfor samme farge som de midterste hestene, som igjen har samme farge som den siste hesten. Ergo har alle de $k+1$ hestene samme farge.

Vi har nå vist, ved matematisk induksjon, at alle hester har samme farge.

Oppsummeringsoppgave 1 Gå tilbake og gjør de oppgavene du ikke har rukket å gjøre tidligere i uka. (:

Fasit (med forbehold om feil)

1 $\frac{1}{2}\tan x, \quad -\sqrt{2}\cos x$

2 Spør studass.

3 Spør studass.

4 **b)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ og $\frac{1}{\sqrt{2}}$, **c)** $\frac{1}{2}$, **d)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, **e)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ og $-\frac{1}{2}$

5 Spør studass.

6 **a)** $x = n\pi$, **b)** $x = n\pi \ \vee \ x = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi \ \vee \ x = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi$, **c)** $x = \frac{n\pi}{2}$, **d)** $x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$ (for $n \in \mathbb{Z}$ i alle oppgavene.)

7 **a)** $2\pi n \leq x \leq 2\pi n + \pi$, **b)** $n\pi - \frac{3\pi}{4} < x < n\pi - \frac{\pi}{2}$, **c)** ingen løsning (for $n \in \mathbb{Z}$ i alle oppgavene.)

8 Spør studass.

9 Spør studass.

E1-3 Spør studass.