



Oppgave 9 fra Øving 2

a) Er funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{hvis } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{hvis } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

en-til-en? Hvorfor/hvorfor ikke?

b) Vis at funksjonen $f(x) = \frac{1}{x+1}$ er en-til-en. Finn inversfunksjonen f^{-1} .

2 La $p(x) = x^5((x-2)^2 + 2x - 5)^8$.

a) Hva er graden til polynomet $p(x)$?

b) Finn alle røttene til $p(x)$.

c) Faktoriser $p(x)$ så mye som mulig (dvs. som et produkt av lineære polynomer og kvadratiske polynomer uten røtter).

3 a) La $p = 21008$ og $d = 7$, finn heltall q, r slik at

$$\frac{p}{d} = q + \frac{r}{d} \\ r < d$$

b) La $p(x) = 21x^2 + 10x + 2$ og $d(x) = 7x + 1$, finn polynomer $q(x), r(x)$ slik at

$$\frac{p}{d} = q + \frac{r}{d} \\ \deg(r) < \deg(d)$$

hvor $\deg(p)$ er graden til et polynom.

4 Bruk polynomdivisjon på $p(x)/d(x)$, hvor $p(x) = x^5$ og $d(x) = x^2 - x + 1$. Etter at du har regnet det ut; sjekk at svaret er riktig ved å gange sammen og plusse sammen de relevante polynomene.

5 La $q(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$.

- a) Vis at -1 og 1 er røtter til $q(x)$.
- b) Faktoriser nå $q(x)$ så mye som mulig. (Hint: bruk polynomdivisjon på $\frac{q(x)}{x^2 - 1}$, og finn så røttene til resultatet du får. Hvor kommer nevneren fra?)

6 Finn alle løsninger av ligningene.

- a) $2x^3 + 10x^2 + 12x = 0$
- b) $8x^6 + 8x^4 - 2x^2 - 2 = 0$ (hint: substituer $u = 2x^2$)
- c) $\frac{4}{1+x} + \frac{4}{1-x} = -1$

7 Løs følgende ligninger for x , ved å uttrykke x ved hjelp av konstanter, variabler og/eller tall.

- a) $4\pi x \cdot 2y \cdot (1 - 4A) = 7$
- b) $2y zx + 2(xy^2 z)^2 - 4 = \pi C^2$

8 Bestem eventuelle asymptoter til funksjonene. Skissér deretter grafene sammen med asymptotene.

- a) $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1}$
- b) $g(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

9 Løs ulikhetene. (Hint: det kan være nyttige å skissere hver side av ulikheten i samme koordinatsystem for å se hvilket område ulikheten beskriver.)

- a) $-x^2 > \pi$
- b) $e^{(x-10)} < 5$
- c) $\ln^2(x) > 1$
- d) $\frac{1}{x} > x$
- e) $\sqrt{(x-2)^2 + 8x} > 1$
- f) $x^2 - 2x \leq 0$
- g) $\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x}$
- h) $3^x \geq 3$

10 Forenkler uttrykkene så mye som mulig.

- a) $(x^{-3})^{-2}$

- b) $\log_5 125$
- c) $\log_{1/3} 3^{2x}$
- d) $10^{-\log_{10} \frac{1}{x}}$
- e) $\frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x} - e^{-2x}}$

11 Finn alle løsninger av ligningene.

- a) $(\log_5 x)^2 = 20 - 4 \log_5(x^2)$
- b) $\log_4(x + 4) - 2 \log_4(x + 1) = \frac{1}{2}$

12 Betrakt funksjonene $f(x) = x^3$ og $g(x) = 3^x$.

- a) Beregn $f(5)$ og $g(5)$.
- b) Løs ligningene $f(x) = 1$ og $g(x) = 1$.
- c) Skriv $f(20)$ og $g(20)$ på standardform.
- d) Skriv $f(-20)$ og $g(-20)$ på standardform.
- e) Skisser de to funksjonene svært omtrentlig og merk deg hvor forskjellige de er.

13 Fornuftige Jonas har bestemt seg for å avsette alle konfirmasjonspengene sine til pensjonssparing. Han har en drøm om å bli millionær på pensjonspengene sine, og leve et liv i sus og dus på Granca. Hvis vi antar at Jonas vil få 6% rente på pensjonsfondet sitt, hvor mye må han minst klare å skrape sammen til konfirmasjonen sin for at pengene skal vokse over 1 000 000 kr innen han pensjonerer seg som 70-åring?

Ekstraoppgave 1 Reidun fikk 20 000 kr til konfirmasjonen. Disse pengene har stått på fastrente-konto i 7 år. Nå er de blitt til 30 000 kr. Hvor god rente fikk Reidun av banken?

Ekstraoppgave 2 De såkalte *hyperbolske funksjonene* er definert som følger:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (\text{sinus hyperbolicus})$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (\text{cosinus hyperbolicus})$$

Vis at de hyperbolske funksjonene tilfredsstiller følgende identiteter.

- a) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$
- b) $\cosh(-x) = \cosh(x)$
- c) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

d) $\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$

Ekstraoppgave 3 Vi skal nå bevise abc -formelen. Nemlig at

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{har løsning(ene)} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

såfremt $b^2 - 4ac \geq 0$. Vi gjør det stegvis.

a) Vis første kvadratsetning,

$$(x + D)^2 = x^2 + 2Dx + D^2$$

for alle tall x og D .

b) Bruk første kvadratsetning til å vise at

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}.$$

c) Ta nå utgangspunkt i $ax^2 + bx + c = 0$ og vis (ved å bruke **b**) at

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Hva må vi kreve om konstanten a for å få lov til å dele på den over alt?

d) Vis med dette at

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}.$$

e) Ved å løse opp absoluttverditegnet på venstre side får vi

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|},$$

hvorfor kan vi nå ta bort absoluttverditegnet rundt $2a$?

f) Vis nå abc -formelen.

Fasit (med forbehold om feil)

2 a) 21, b) $0, 1 \pm \sqrt{2}$, c) $x^5(x - 1 - \sqrt{2})^8(x - 1 + \sqrt{2})^8$

3 $3001 + \frac{1}{7}$, $3x + 1 + \frac{1}{7x + 1}$

4 $x^3 + x^2 - 1 + \frac{1 - x}{x^2 - x + 1}$

5 b) $(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$

6 a) $0, -2 - 3$, b) $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, c) ± 3

7 a) $x = \frac{7}{8\pi(1-4A)y}$, b) $x = \frac{-yz \pm \sqrt{y^2z^2(2(\pi c^2 + 4)y^2 + 1)}}{2y^4z^2}$

8 a) $y = 3$ (horisontal) $x = \pm 1$ (vertikale), b) $y = x$ (skrå) (ingen vertikale)

9 a) ingen løsning, b) $x < 10 + \ln 5$, c) $0 < x < \frac{1}{e} \vee x > e$,
d) $0 < x < 1 \vee x < -1$, e) $x > -1 \vee x < -3$, f) $0 \leq x \leq 2$,
g) $x \geq 4 \vee -2 \leq x < 0$, h) $x \geq 1$

10 x^6 , 3 , $-2x$, x , $\frac{1}{e^x - e^{-x}}$,

11 a) $x = 5^{-10} \vee x = 25$, b) $x = -2 \vee \frac{1}{2}$

12 a) 125 og 243, b) $x = 1$ og $x = 0$, c) $8 \cdot 10^3$ og $3.486784401 \cdot 10^9$,
d) $-8 \cdot 10^3$ og $\approx 2.868 \cdot 10^{-10}$

13 Omtrent 40 500kr (under antagelsen om at pengene står i fondet i ca. 55 år).

E1 $\sqrt[7]{\frac{3}{2}} - 1 \approx 6\%$

E2-3 Spør studass.