Oppfriskningskurs i Matematikk

Dag 1

Stine M. Berge

05.07.19

Introduksjon

- Informasjon: `https://wiki.math.ntnu.no/oppfrisk/2019/start`
- Forelesninger
  - 9:15–12:00 man/tor, 8:15–12:00 tir/ons
  - Alltid i F1

Introduksjon

- Informasjon: `https://wiki.math.ntnu.no/oppfrisk/2019/start`
- Forelesninger
  - 9:15–12:00 man/tor, 8:15–12:00 tir/ons
  - Alltid i F1
- Øvinger
  - Mandag–torsdag 13:15–16:00
  - Studentassistenter (studasser) til stede 13:15–15:00 (16:00 tir/ons)
  - Gruppe/rom på hjemmesiden (studassene viser veien fra F1 13:00 i dag)

Introduksjon

- Informasjon: `https://wiki.math.ntnu.no/oppfrisk/2019/start`
- Forelesninger
  - 9:15–12:00 man/tor, 8:15–12:00 tir/ons
  - Alltid i F1
- Øvinger
  - Mandag–torsdag 13:15–16:00
  - Studentassistenter (studasser) til stede 13:15–15:00 (16:00 tir/ons)
  - Gruppe/rom på hjemmesiden (studassene viser veien fra F1 13:00 i dag)
- (Obligatorisk) prøve/test
  - Fredag 09:15–10:45
  - Gjennomgås 11:15–12:00
  - Rettes (med tilbakemelding)

Lærebok

- Ingen lærebok til *dette* kurset.
- Men lurt å kjøpe læreboka til **ditt første matematikkemne** (TMA4100/MA1101/TDAT1004 etc.) allerede nå; forkunnskaps-kapitlet inneholder mye av stoffet vi skal gjennom denne uka.
- Bokhandelen (Akademika — 2. etasje i bygningen ut døren rett frem) har oversikt over hvilke bøker som hører til hvilke studier.

Spørsmål?

Tall

- Naturlige Tall: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- Heltall: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Rasjonale Tall/ Brøktall: $\mathbb{Q} = \left\{q = \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\}$
  - Alle desimaltall der desimalene tilslutt repeteres
  - Eksempel: $1.3212121\ldots = \frac{436}{330}$
- Reelle Tall: $\mathbb{R} = \{\text{Alle desimaltall}\}$
  - Eksempel: $\sqrt{2},\ 3^{1/3},\ e,\ \pi,\ 1.01001000100001\ldots \in \mathbb{R}$
- Symbolet $\in$ betyr "inneholdt i".

Spoiler!

Komplekse tall: $\mathbb{C}$

Inkluderer løsninger på polynomet $x^2 + 1 = 0$

Brøk

Brøk

- Gange sammen brøk

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad b, d \neq 0$$

- Dele brøk

$$\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \quad b, d, c \neq 0$$

- Forkorte/utvide brøk

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \quad c, b \neq 0$$

- Legge sammen brøk (felles brøkstrek)

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, \quad c \neq 0$$

Test deg selv

Oppgave

Forenkl følgende utrykk:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{6}-\frac{4}{2}+1\right).$$

Test deg selv

Oppgave

Forenkl følgende utrykk:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{6}-\frac{4}{2}+1\right).$$

Løsning

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{3}{6}-\frac{4}{2}+1\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{6}-\frac{4\cdot 3}{6}+\frac{6}{6}\right) && \text{Felles brøkstrek}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3-4\cdot 3+6}{6}\right) && \text{Addisjon substraksjon}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-3}{6}\right) && \text{Addisjon/substraksjon}\\
&= \frac{-3}{12} = \frac{-1}{4} && \text{Multiplikasjon og forkorting}
\end{aligned}$$

Regneregler for **ulikheter**

Regneregler for **ulikheter**

La $a, b, c \in \mathbb{R}$ med $a < b$ (eller $a \leq b$). Da gjelder følgende:

- $a \pm c < b \pm c$
- $ac < bc, \quad$ hvis $c > 0$
- $ac > bc, \quad$ hvis $c < 0$ (**snu ulikheten**)
- $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}, \quad$ hvis $a > 0$
- $b < c$ vil også $a < c$

Intervaller

Intervaller

Begrensede intervaller:

- *Åpnent intervall:* $(a, b) = \{x : a < x < b\}$. (: betyr “slik at”.)
- *Lukket intervall* $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$.
- *Halvåpnent intervall* $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$ og $(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$.

Intervaller

Begrensede intervaller:

- *Åpnent intervall:* $(a, b) = \{x : a < x < b\}$. (: betyr "slik at".)
- *Lukket intervall* $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$.
- *Halvåpnent intervall* $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$ og $(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$.

Ubegrensede intervaller:

- *Åpnet intervall:* $(a, \infty) = \{x : a < x < \infty\}$ og $(-\infty, b) = \{x : -\infty < x < b\}$.
- *Lukket intervall:* $(-\infty, b] = \{x : -\infty < x \leq b\}$ og $[a, \infty) = \{x : a \leq x < \infty\}$.
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ (er både et åpent og lukket intervall).

Union og Snitt

Union "legger sammen" intervaller og noteres med $\bigcup$.

Example

$(1,2)\bigcup(3,4)$ inneholder alle punkter som enten er i $(1,2)$ eller i $(3,4)$.

Snitt ser på hva intervallene har felles og noteres med $\bigcap$.

Example

$(1,4)\bigcup(3,5)$ inneholder alle punkter som er både i $(1,4)$ og i $(3,4)$.
Det vil si $(3,4)$.

Test deg selv

Oppgave

Finn intervallet som inneholder alle x som tilfredsstiller

$$x - 3 \leq 3x + 5.$$

Test deg selv

Oppgave

Finn intervallet som inneholder alle x som tilfredsstiller

$$x - 3 \leq 3x + 5.$$

Løsning

Forenkl ulikheten:

$$\begin{aligned}
x - 3 &\leq 3x + 5 && -x \\
-3 &\leq 2x + 5 && -5 \\
-8 &\leq 2x && \div 2 \\
-4 &\leq x \\
-4 &\leq x < \infty.
\end{aligned}$$

Dermed får vi det lukkede intervallet $[-4, \infty)$.

Regneregler for **absoluttverdi**

Regneregler for **absoluttverdi**

La a, b være reelle tall. Da gjelder følgende:

- $|-a| = |a|$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ og $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Trekantulikheten)
- For $a \geq 0$ har ligningen $|x| = a$ løsningene $x = a$ og $x = -a$

Regneregler for **Røtter**

Regneregler for **Røtter**

La a, b være reelle tall. Da gjelder følgende:

- $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$
- $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^m$
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ og $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (for $a, b \geq 0$),
- **NB** $\sqrt[n]{a + b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

Test deg selv

Oppgave

Løs ligningen:

$$x^4 = 16.$$

Test deg selv

Oppgave

Løs ligningen:

$$x^4 = 16.$$

Løsning

Sett $x^2 = y$, da er ligningen $y^2 = 16$.
Ta roten på begge sider, da er løsningene $y = \pm 4$.
Innse at siden $x^2 > 0$ kan ikke $y = -4$ være en løsning.
Løs ligningen $x^2 = 4$.
Løsninger $x = \pm 2$.

Implikasjon og Ekvivalens

Ligninger

Example

Frank er dobbelt så gammel som Casper. Om 10 år vil Franks alder være halvparten så stor som tre ganger Caspers alder. Hvor gamle er de nå?

Ligninger

Example

Frank er dobbelt så gammel som Casper. Om 10 år vil Franks alder være halvparten så stor som tre ganger Caspers alder. Hvor gamle er de nå?

Example

En kule og et kvadrat har et samlet volum på $3m^3$. Kulen har en diameter på $1m$. Hva er sidelengden til kvadratet?

Det kartesiske planet — $\mathbb{R}^2$

Regneregler for **lengde**

Regneregler for **lengde**

La a være reelle tall og $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ være punkter i planet. Da gjelder følgende:

- $|-\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_1|$
- $|a \cdot \mathbf{p}_1| = |a| \cdot |\mathbf{p}_1|$
- $|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2| \leq |\mathbf{p}_1| + |\mathbf{p}_2|$ (Trekantulikheten)

Test deg selv

Oppgave

Finn lengden av vektoren

$$-3\,(1,2)\,.$$

Test deg selv

Oppgave

Finn lengden av vektoren

$$-3\,(1,2)\,.$$

Løsning

$$\begin{aligned}|-3\,(1,2)| &= |-3|\,|(1,2)| \\ &= 3\sqrt{1^2+2^2} \\ &= 3\sqrt{5}\end{aligned}$$

Rette linjer

- Linjer i planet: $y = ax + b$ eller $x = ay + b$.
- $x = a$ er en vertikal linje og $y = b$ horosontal linje.
- Den rette linjen gjennom to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) har ligning $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$.

Grafer

Sirkler

- *Sirkelen* med sentrum i $S = (x_0, y_0)$ og radius $r > 0$ består av alle punkter hvis avstand til S er r. Dens ligning er

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

- Sirkelen med sentrum i $(0, 0)$ (origo) og radius 1 kalles *enhetssirkelen*; $x^2 + y^2 = 1$.
- Punktene innenfor (og på) en sirkel utgjør en *(lukket) disk*; $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$.
- En *åpen disk* ekskluderer punktene på selve sirkelen; $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$.

Test deg selv

Oppgave

Beskriv mengden med ord

$$(x-1)^1 + y^2 \leq 9.$$

Test deg selv

Oppgave

Beskriv mengden med ord

$$(x-1)^1 + y^2 \leq 9.$$

Løsning

Den lukkede disken med sentrum $(1,0)$ og radius 3.

Grafer

Ellipser

Ellipsen med sentrum i (x_0, y_0) og halvakser a og b har ligningen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Grafer

Ellipser

Ellipsen med sentrum i (x_0, y_0) og halvakser a og b har ligningen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Hyperbler

Ligningen(e)

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

beskriver en hyperbel (hver består av to grener).
Bunnpunkt/toppunkt:$(\pm a, 0)$
Assymptoter: $y = \pm \frac{b}{a} x$

Parabler

Ligningen

$$y = a(x-h)^2 + k \qquad (\text{og } x = a(y-h)^2 + k)$$

beskriver en parabel.

- $a > 0 \implies$ og (h, k) blir bunnpunktet.
- $a > 0 \implies$ og (h, k) blir toppunktet.