Oppfriskningskurs i Matematikk

Dag 2

Stine M. Berge

06.07.19

Funksjoner

Definisjon

En funksjon f er en prosses som ett element i en mengde x til ett og bare ett element $f(x)$ i en annen mengde.
Mengden funksjonen går fra er kalt *definisjonsmengden*, og blir denotert med D_f.
Mengden som blir truffet av f er kalt *verdimengden* (eller *bildet*) til f, og noteres med V_f.
For å indikere definisjonsmengde og verdimengden til f vil vi ofte skrive $f : D_f \to V_f$, som leses f går fra mengden D_f til mengden V_f.

Eksempler

$f(x) = x^2 + 3$ er en funksjon som går fra $f : \mathbb{R} \to [3, \infty)$.
Eksempel på en ligning som ikke er en funksjon $f(x) = \pm\sqrt{4 - x}$. Siden den gir ut to verdier.

Funksjoner

- En funksjon f er ikke ordentlig definert før definisjonsmengden er spesifisert.

Konvensjon for definisjonsmengden

Hvis en funksjon f blir beskrevet uten at definisjonsmengden angis eksplisitt, så antas det at definisjonsmengden D_f består av alle reelle tall x slik at $f(x)$ gir mening (og blir et reelt tall).

- Når f beskrives med en formel holder det stort sett å fjerne de x-verdiene hvor vi deler på 0 eller tar roten eller logaritmen av et negativt tall i uttrykket for $f(x)$.

Eksempel

La $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Da må $4 - x^2 \geq 0$, eller er nevneren negativ. Dette medfører at om ikke annet er spesifisert er konvensjonen at definisjonsmengden er $D_f = [-2, 2]$. Verdimengden er $[0, 2]$.

Test deg selv

Hva er definisjonsmengden til $f(x) = \frac{1}{x}$.

Løsning

f er definert så lenge $x \neq 0$. Dette vil si at definisjonsmengden er $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Funksjoner

- Vanligvis angis en funksjon via en eksplisitt formel. Men generelle funksjoner kan være ganske rare.

Gulvfunksjonen, se Wikipedia

Gulvfunksjonen $\lfloor \ \rfloor : [1, \infty) \to \mathbb{N}$ er definert som den nærmeste heltallet under som er mindre enn x. Eksempel: $\lfloor 1.43 \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 4 \rfloor = 4$.

Nærmeste primtall

La $f : [1, \infty) \to \{p : p \text{ er ett primtall}\}$ være gitt ved å sette $f(x)$ lik det minste primtallet større eller lik x.
Eksempel $f(1) = f(\sqrt{2}) = f(2) = 2$, $f(14.2) = 17$, $f(1000000000) = ??$
Ingen (verken mennesker, dyr eller datamaskiner) kan regne ut $f(x)$ for *veldig* store x-verdier. Men f er allikevel en veldefinert (matematisk) funksjon!

Nye funksjoner fra gamle

Gitt to funksjoner $f\colon D_f \to V_f$ og $g\colon D_g \to V_g$. Da kan vi definere nye funksjoner $f+g$, $f-g$, fg, og $\frac{f}{g}$ via formlene:

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\
(f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\
(fg)(x) &= f(x)g(x)\\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}
\end{aligned}
$$

De tre første er definert på $D_f \cap D_g$, og den siste er definert for alle $x \in D_f \cap D_g$ hvor $g(x) \neq 0$.

- $D_f \cap D_g$ består av alle tall x som tilhører *både* D_f og D_g.
- ($D_f \cup D_g$ består av alle tall x som tilhører *minst én* av D_f og D_g.)

Nye funksjoner fra gamle

- Stykkevis definerte funksjoner (delt forskrift)

Sammensatte funksjoner

Gitt to funksjoner $f\colon D_f \to V_f$ og $g\colon D_g \to V_g$. Den *sammensatte funksjonen* $f \circ g$ er definert ved formelen

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

$f \circ g$ er definert for alle $x \in D_g$ som er slik at $g(x) \in D_f$.

Grafer

- Grafer til funksjoner er spesielle typer grafer

En generell graf (kurve) i planet er grafen til en funksjon $\iff$ Det for hver x-verdi finnes høyst én y-verdi slik at (x, y) ligger på grafen $\iff$ Hver vertikale linje skjærer grafen høyst én gang

Skissere/gjenkjenne grafer (til funksjoner)

Nyttige knep

1. **Ha en mental database over basisfunksjoner** (neste 2 sider)
2. **Forskyvning i y-retning**: Får grafen til $f(x) + a$ ved å forskyve grafen til f a hakk oppover (nedover hvis $a < 0$).
3. **Forskyvning i x-retning**: Får grafen til $f(x + a)$ ved å forskyve grafen til f a hakk til venstre (høyre hvis $a < 0$).
4. **Skalering**: Får grafen til $af(x)$ ved å komprimere x-aksen (i $y = f(x)$) med en faktor a (og snu opp ned hvis $a < 0$). Større $|a|$ gir "spissere" graf.
5. **Speiling**: Får grafen til $f(a - x)$ ved å speile grafen til f om den vertikale linja $x = \frac{a}{2}$.
6. **Symmetri**: *Odde* og *like* funksjoner
7. **Fortegnsskjema (for f, f' og f'') og tabell med funksjonsverdier**
8. (Asymptoter)

Noen basisfunskjoner:

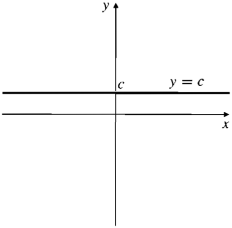


Figure P.37 The graph of a constant function $f(x) = c$

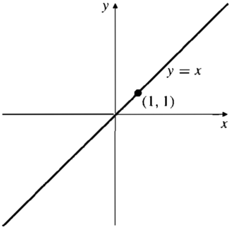


Figure P.38 The graph of $f(x) = x$

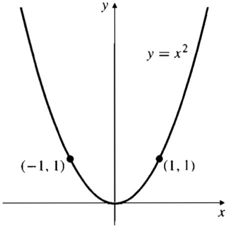


Figure P.39 The graph of $f(x) = x^2$

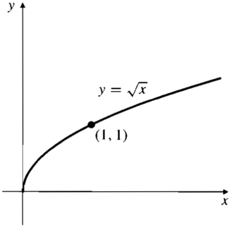


Figure P.40 The graph of $f(x) = \sqrt{x}$

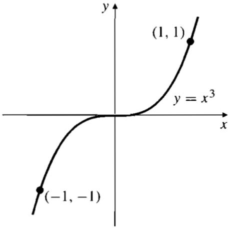


Figure P.41 The graph of $f(x) = x^3$

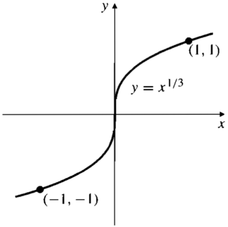


Figure P.42 The graph of $f(x) = x^{1/3}$

Læreboka i TMA4100, s. 27

Noen flere basisfunskjoner:

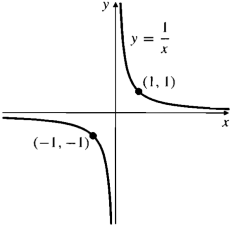


Figure P.43 The graph of $f(x) = 1/x$

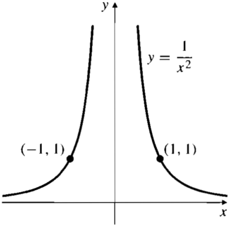


Figure P.44 The graph of $f(x) = 1/x^2$

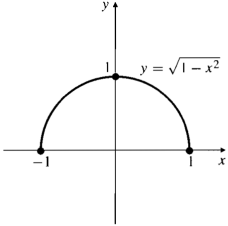


Figure P.45 The graph of $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

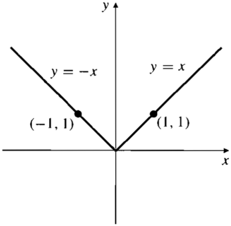


Figure P.46 The graph of $f(x) = |x|$ Læreboka i TMA4100, s. 27

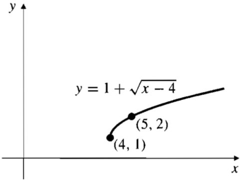


Figure P.47 The graph of $y = \sqrt{x}$ shifted right 4 units and up 1 unit

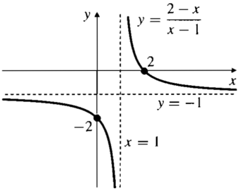
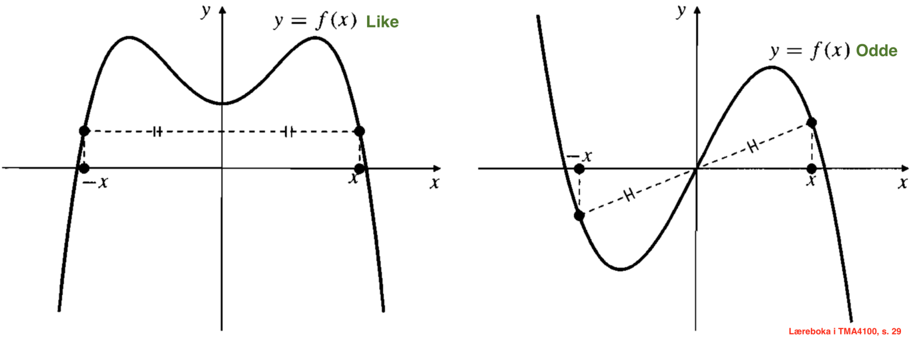


Figure P.48 The graph of $\frac{2 - x}{x - 1}$

Odde og like funksjoner



Læreboka i TMA4100, s. 29

Egenskaper

- like $\pm$ like $=$ like
- odde $\pm$ odde $=$ odde
- like $\cdot$ like $=$ like
- odde $\cdot$ odde $=$ like
- odde $\cdot$ like $=$ odde
- f odde $\implies f(0) = 0$
- f like $\implies f(x+k)$ symmetrisk om linja $x = -k$

Uformell introduksjon til **kontinuerlige** funksjoner

- Vi sier at $f : D_f \to V_f$ er en *kontinuerlig* funksjon (på hele D_f) dersom f er kontinuerlig i hvert punkt (tall) $a \in D_f$.
- Spesielt er $g : \mathbb{R} \to V_f$ en kontinuerlig funksjon hvis og bare hvis g er kontinuerlig i ethvert reelt tall a.

Nyttig knep

En funksjon f er kontinuerlig i et punkt
$a \in D_f \iff \lim_{x \to a-} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a+} f(x)$.

- "Venstre grenseverdi = funksjonsverdi = høyre grenseverdi"

Uformell introduksjon til **kontinuerlige** funksjoner

- De aller fleste "vanlige" funksjoner er kontinuerlige (på hele sin definisjonsmengde):
  - konstantfunksjoner, x, x^2, x^3, mer generelt alle polynomer
  - $|x|$
  - rasjonale funksjoner
  - $x^{\frac{m}{n}}$
  - $\sin, \cos, \tan$ (og deres inverser)
  - $e^x, \ln x$
- Sum, differanse, produkt, brøk og sammensetning av funksjoner bevarer kontinuitet.

NB: **delt forskrift** kan ødelegge, så må alltid dobbeltsjekke der forskriften endres.

Inverse funksjoner (Frivillig)

For å vise at en funskjon $f : D_f \to V_f$ *ikke* er en-til-en

Finn to ulike (konkrete tall) $x_1, x_2 \in D_f$ som er slik at $f(x_1) = f(x_2)$.

For å vise at en funskjon $f : D_f \to V_f$ *er* en-til-en

Anta at $x_1, x_2 \in D_f$ ("ukjente tall") er slik at $f(x_1) = f(x_2)$. Vis at da må $x_1 = x_2$.

Egenskaper til f^{-1}

Anta $f : D_f \to V_f$ er en-til-en. Da gjelder:

- $f^{-1}(f(x)) = x$ for alle $x \in D_f$
- $f(f^{-1}(y)) = y$ for alle $y \in V_f$
- f^{-1} er en-til-en og $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$
- $V_{f^{-1}} = D_f$ og $D_{f^{-1}} = V_f$
- Får grafen til f^{-1} ved å speile grafen til f om linja $y = x$.

Inverse funksjoner (Frivillig)