$\boxed{1}$ Forenkl uttrykket $\log_2(2^5) + 4\log_4(8) - e^{\ln(6)}$.

Løysing:

$$\begin{aligned}\log_2\left(2^5\right) + 4\log_4(8) - e^{\ln(6)} &= 5 + 4\log_4\left(4^{3/2}\right) - 6\\ &= 5 - 6 + 6 = 5.\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Finn mengden som tilfredsstiller ligningen $\frac{x}{\sqrt{2}-1} < \frac{x^2}{\sqrt{2}+1}$.

Løsning:
La oss begynne med å multiplisere ligningen med $\sqrt{2}+1$, da får vi $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}x < x^2$. Ved å bruke konjungatsetningen kan vi skrive

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = 3 + 2\sqrt{2},$$

og dermed er ulikheten vår

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)x < x^2.$$

Legg merke til at $x \neq 0$. Dermed kan vi dele på x. I dette tilfellet må vi dele opp i to tillfeller: $x > 0$ og $x < 0$. Når $x > 0$ får vi ligningen $3 + 2\sqrt{2} < x$. Og dermed får vi intervallet $\left(3+2\sqrt{2}, \infty\right)$ Når $x < 0$ snus ulikheten når vi deler begge sider på x, og dermed får vi $3 + 2\sqrt{2} > x$. Denne ulikheten er alltid sann når $x < 0$, og dermed får vi intervallet $(-\infty, 0)$. Dermed blir den endelige mengden

$$(-\infty, 0) \cup \left(3+2\sqrt{2}, \infty\right).$$

$\boxed{3}$ Avgjer kva for nokre av påstandane er sanne, usanne eller ikkje gir meining:

i) $x^3 = 1 \iff x = 1$
ii) $x^2 = 4 \iff x = 2$
iii) $x^2 \iff 9,\ x \iff \pm 3.$
iv) $x = \pi \implies \cos(x) = -1$
v) $\cos(x) = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Løysing:

i) $x^3 = 1 \iff x = 1$ er sant.
ii) $x^2 = 4 \iff x = 2$ er usant.
iii) $x^2 \iff 9, x \iff \pm 3$ gir ikkje meining. (Derimot hadde $x^2 = 9, \iff x = \pm 3$ gitt meining og vært ein sann påstand.)
iv) $x = \pi \implies \cos(x) = -1$ er sant.
v) $\cos(x) = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ er sant.

$\boxed{4}$ Per skal bestille en plakat via NTNU's grafisk senter, men vet ikke hvilken størrelse han skal velge. Han vet at om han har et A0-ark og deler den i to på langsiden får han to A1-ark osv.. Samtidig vet han at et A0-ark har et areal på en kvadratmeter og at forholdet mellom langsiden og kortsiden for alle A-arkene er $\sqrt{2}$. Hva er dimensjonene til et A1-ark?

Løsning:
La l_1 notere lengden av langsiden til et A1-ark og k_1 lengden av kortsiden til et A1-ark. Siden et A1-ark har halvparten av arealet til et A0-ark, vil $k_1 * l_1 = 1/2m^2$. Samtidig vet vi at forholdet $l_1/k_1 = \sqrt{2}$ som medfører at $l_1 = \sqrt{2}k_1$. Setter vi dette inn i ligningen for arealet får vi at $\sqrt{2}k_1^2 = 1/2m^2$. Siden k_1 er positiv får vi løsningen

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}.$$

Langsiden får da lengde

$$l_1 = \sqrt{2}k_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

$\boxed{5}$ **a)** Utfør polynomdivisjonen $\frac{p(x)}{x^2+1}$, der $p(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$.

Løysing
Om vi utfører polynomdivisjonen får vi

$$
\begin{array}{l}
(\quad x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3) : (x^2+1) = x^2 + 2x - 3. \\
\underline{-x^4 \qquad\quad -x^2} \\
\qquad\quad 2x^3 - 3x^2 + 2x \\
\qquad\ \underline{-2x^3 \qquad\quad -2x} \\
\qquad\qquad\quad -3x^2 \qquad -3 \\
\qquad\qquad\quad\ \underline{3x^2 \qquad\ +3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ 0
\end{array}
$$

b) Finn alle røtene til $p(x)$.

Løysing
Av oppgåve a) får vi at $p(x) = (x^2+1)(x^2+2x-3)$. Vi veit at polynomet $x^2+1 \geq 1$, og dermed ikkje har nokon røter. Bruker vi abc-formelen for å finne røtene til $x^2+2x-3=0$ får vi at

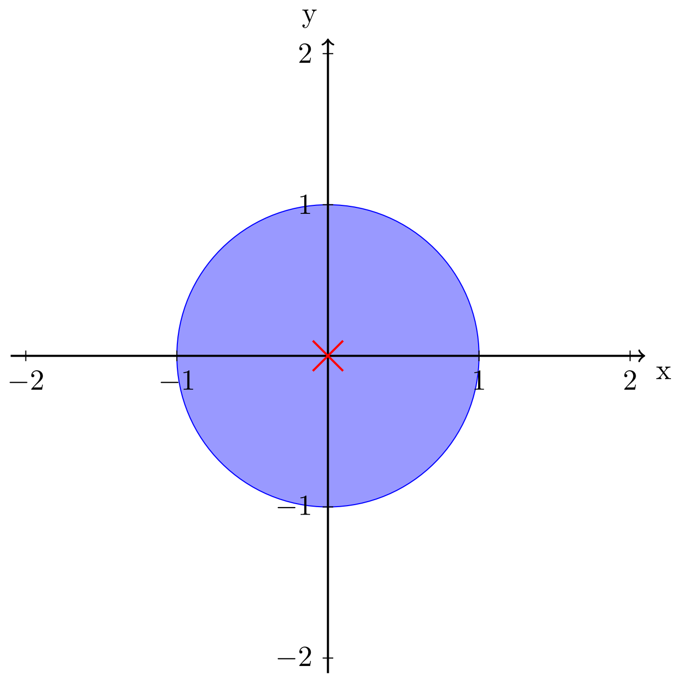
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = -1 \pm 2,$$

som vil si at $x=1$ og $x=-3$. Dette vil si at røtene til p er 1 og -3.

$\boxed{6}$ Skisser området i planet som består av alle punkter (x, y) som tilfredsstiller ulikhetene

a) $\frac{1}{x^2+y^2} \geq 1$.

Løsning: Noter at $(x, y) \neq (0, 0)$, siden da ender vi opp med å dele på 0. Ganger vi med x^2+y^2 over på begge sider av ulikheten får vi $1 \geq x^2+y^2$, der vi ikke har med $(x, y) = (0, 0)$. Dermed får vi den lukkede enhetsdisken der vi har fjernet sentrum.

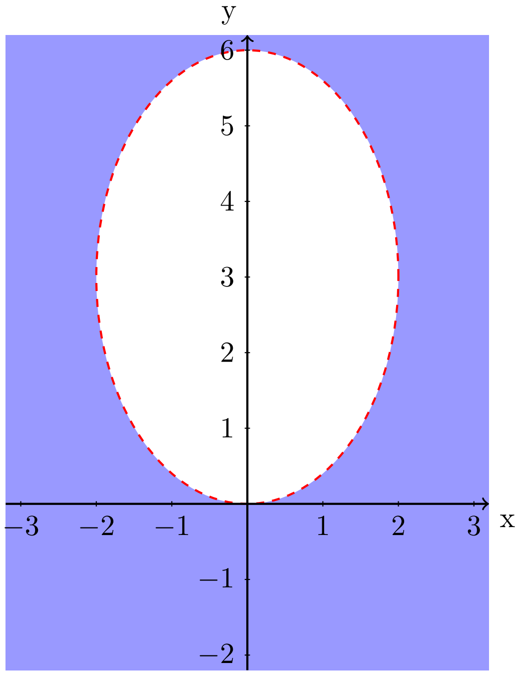


b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{2}{3}y > 0$.

I denne oppgaven må vi fulføre kvadratet. Vi har at $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{2}{3}y = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{9}(y^2 - 6y)$. Fulfører vi kvadratet får vi at $y^2 - 6y = (y-3)^2 - 9$, og dermed får vi

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{2}{3}y = \frac{x^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} - 1.$$

Går vi tilbake til ulikheten får vi at $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} > 1$. Det vil si at området er det som ligger utenfor ellipsen $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$, som har sentrum $(0, 3)$ og store halvakse er linjen mellom sentrum og $(0,6)$ og lillehalvakse er linjen mellom sentrum og $(2,3)$.



$\boxed{7}$ Gitt funksjonen $f(x) = \frac{x+3}{x^2(x-1)}$.

a) Utfør delbrøkoppspaltinga av funksjonen f.
Hint: Anta at $\frac{x+3}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1}$, hvor A, B, C er konstantar.

Løysing:
La oss anta at funksjonen f kan skrivast på forma

$$\frac{x+3}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1}.$$

Trekkjer vi saman brøkane på høgre side får vi at

$$\frac{x+3}{x^2(x-1)} = \frac{A(x-1) + Bx(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)}.$$

Om det vi antar er sant må

$$x + 3 = A(x-1) + Bx(x-1) + Cx^2.$$

Det er to måtar å løyse likninga over på.
Metode 1 (Innsetjing):
Viss likninga over er sann må den være sann for alle verdiar av x, og sidan vi har tre ukjente treng vi også tre likningar for å finne A, B, C og dermed må vi setje inn tre verdiar for x. Set vi inn verdiane 0, 1 og -1 for x får vi likningssettet

$$\begin{cases} 3 = A(-1) + 0 + 0 = -A & \iff \quad A = -3 \\ 1 + 3 = 4 = 0 + 0 + C = C & \iff \quad C = 4 \\ -1 + 3 = A(-1-1) + B(-1)(-1-1) + C(-1)^2 & \iff \quad 2 = -2A + 2B + C. \end{cases}$$

Nå står det berre at å løyse for B, vi har at $2 = -2 * (-3) + 2B + 4 = 10 + 2B$. Dette medfører at $B = -4$. Dermed er $\frac{x+3}{x^2(x-1)} = \frac{-3}{x^2} + \frac{-4}{x} + \frac{4}{x-1}$.

Metode 2 (Likskap av polynom):
Om vi gangar ut parentesane og får at

$$x + 3 = A(x-1) + Bx(x-1) + Cx^2 = (B+C)x^2 + (A-B)x - A.$$

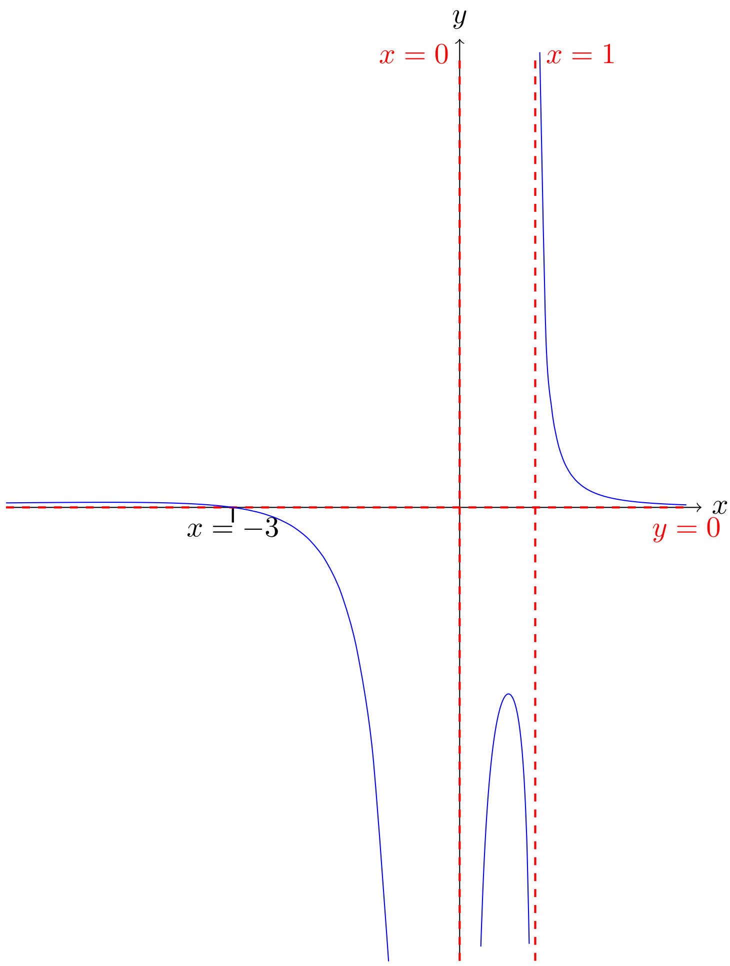
Dersom likskapen over stemmer må $B + C = 0$, $A - B = 1$ og $-A = 3$, elles er ikkje polynoma like! Løyser vi likningssettet får vi $A = -3$, $B = -4$ og $C = 4$ slik som over.

b) Skisser grafen og marker dei horisontale og vertikale asymptotane til funksjonen f.

Løysing:
La oss begynne med å finne dei horisontale og vertikale asymptotane. Dei vertikale finn vi ved å setje nemnaren lik 0. Om vi løysar likninga $x^2(x-1) = 0$ får vi at vi har vertikale asymptotar når $x = 0$ og $x = 1$. Den horisontale asymptoten finn vi ved å ta grensa $x \to \pm\infty$. Grensene blir da

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+3}{x^2(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+3}{x^3 - x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/x^2 + 3/x^3}{1 - 1/x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Teknar vi fortegnsskjema får vi at funksjonen er positiv før $x = -3$ og etter $x = 1$, og negativ i mengda $(-3, 0) \cup (0, 1)$. Dette vil si at funksjonen ser slik ut



$\boxed{8}$ Bevis at summen av tre påfølgende heltall er delelig på tre.

Løsning:
La n være et vilkårlig heltall. Da er summen av de tre påfølgende heltallene lik

$$n + (n + 1) + (n + 2) = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3\,(n + 1)\,.$$

Siden $3\,(n + 1)$ er delelig på 3 (siden $\frac{3(n+1)}{3} = n + 1$) har vi bevist påstanden.

Alternativt kan vi bruke induksjon, men for at påstanden skal gjelde for *alle* heltall, og ikke bare de positive må vi bruke induksjon to ganger. Viser at $n+(n+1)+(n+2)$ er delelig på 3 når $n \geq 0$.

1. $n = 0$ medfører at $0 + 1 + 2 = 3$ som er delelig på 3.
2. Vi antar at påstanden er sann for et tall n. Dvs. $n + (n + 1) + (n + 2)$ er delelig på 3.
3. Skal vise at påstanden da vil være sann for $n + 1$.

$$(n + 1) + ((n + 1) + 1) + ((n + 1) + 2) = n + 1 + n + 1 + 1 + n + 1 + 2$$

$$= (n + (n+1) + (n+2)) + 3.$$

Siden vi vet at $(n + (n+1) + (n+2)) = 3j$ for et positivt tall j får vi at

$$(n+1) + ((n+1)+1) + ((n+1)+2) = 3\,(j+1)\,,$$

og er dermed delelig på 3.

La oss vise at $-n + (-n+1) + (-n+2)$ er delelig på 3, som viser påstanden når minst ett av tallene er null eller mindre.

1. $n = 0$ medfører at $-0 + (-0+1) + (-0+2) = 3$ som er delelig på 3.
2. Vi antar at påstanden er sann for et tall n. Dvs. $-n + (-n+1) + (-n+2)$ er delelig på 3.
3. Skal vise at påstanden da vil være sann for $n+1$.

$$\begin{aligned} -(n+1) + (-(n+1)+1) + (-(n+1)+2) &= -n - 1 - n - 1 + 1 - n - 1 + 2 \\ &= (-n + (-n+1) + (-n+2)) + 3. \end{aligned}$$

Siden vi vet at $(-n + (-n+1) + (-n+2)) = 3j$ for et ikke positivt tall j får vi at

$$-(n+1) + (-(n+1)+1) + (-(n+1)+2) = 3\,(j+1)\,,$$

som er delelig på 3.